Γ1)

$$(f(x)+x)(f'(x)+1)=x \Leftrightarrow f(x)f'(x)+f(x)+xf'(x)+x=x \Leftrightarrow \left(\frac{f^2(x)}{2}+xf(x)\right)'=$$
$$0 \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2}+xf(x)=c \overset{f(0)=1,c=\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} f^2(x)+2xf(x)+x^2=x^2+1 \Leftrightarrow (f(x)+x)^2=$$
$$x^2+1$$

η $f(x)+x$ είναι συνεχής και μη μηδενιζόμενη άρα διατηρεί πρόσημο και μάλιστα είναι θετική αφού $f(0)>0$
εξ ου και: $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$
(δε θα μιλήσω για διακρίνουσα...)

Γ2)

Είναι εύκολα $f(x)>0$ και $f'(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{-f(x)}{\sqrt{x^2+1}}<0$ άρα γνήσια φθίνουσα.
$f(g(x))=1=f(0)\Leftrightarrow g(x)=0$
Έχουμε $g'(x)=3x^2+3x=3x(x+1)$ συνεπώς έχουμε τοπικά ακρότατα στο 0 και -1 και η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα στα $(-\infty,-1]$ και $[0,+\infty)$ και γνήσια φθίνουσα στο $(-1,0)$

$$f\left((-\infty,-1]\right)=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right], f((-1,0)=\left(-1,-\frac{1}{2}\right), f\left([0,+\infty)\right)=[-1,+\infty)$$

Έχουμε μία και μοναδική ρίζα στο τελευταίο διάστημα.

Γ3)

$$h(x)=\sigma\upsilon\nu x\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt-f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\eta\mu x, x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$$

$h(0)=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt>0$ καθώς $f(x)>0$ και το διάστημα ολοκλήρωσης είναι το $\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$ και

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}<0$$

Από Bolzano υπάρχει x_0 στο ζητούμενο ανοιχτό διάστημα ώστε:

$$\sigma\upsilon\nu x_0\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt=f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\eta\mu x_0 \Leftrightarrow \int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt=f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x_0$$

Αλλιώς με $Rolle$ στην $h(x)=\eta\mu x\displaystyle\int_{0}^{x-\frac{\pi}{4}}f(t)dt$