Η θεωρία στα Μαθηματικά κατεύθυνσης :

Ορισμοί – Ιδιότητες - Προτάσεις – Θεωρήματα – Αποδείξεις

Α. Μιγαδικοί αριθμοί

1. Πότε δυο μιγαδικοί είναι ίσοι και πότε ένας μιγαδικός είναι ίσος με 0 ;

Απάντηση

Δύο μιγαδικοί αριθμοί $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι ίσοι, αν και μόνο αν $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$. Δηλαδή ισχύει:

$$\boxed{\alpha+\beta i=\gamma+\delta i \Leftrightarrow \alpha=\gamma \text{ και } \beta=\delta .}$$

Επειδή $0=0+0i$, έχουμε

$$\boxed{\alpha+\beta i=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ και } \beta=0 .}$$

2. Πώς ορίζονται οι πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς ;

Απάντηση

- Για την **πρόσθεση** δύο μιγαδικών αριθμών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ έχουμε:

$$\boldsymbol{(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i} .$$

- Για την **αφαίρεση** του μιγαδικού αριθμού $\gamma+\delta i$ από τον $\alpha+\beta i$, επειδή ο αντίθετος του μιγαδικού $\gamma+\delta i$ είναι ο μιγαδικός $-\gamma-\delta i$, έχουμε:

$$(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha+\beta i)+(-\gamma-\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i .$$

Δηλαδή

$$\boldsymbol{(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i} .$$

- Για τον **πολλαπλασιασμό** δύο μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ έχουμε:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)&=\alpha(\gamma+\delta i)+\beta i(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+(\beta i)(\delta i)=\\ &=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+\beta\delta i^2=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i-\beta\delta=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i\end{aligned}$$

Δηλαδή είναι :

$$\boldsymbol{(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i} .$$

- Τέλος, για να εκφράσουμε το **πηλίκο** $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$, όπου $\gamma+\delta i\neq 0$, στη μορφή $\kappa+\lambda i$, πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το συζυγή του παρονομαστή και έχουμε:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i\,.$$

Δηλαδή,

$$\boldsymbol{\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i}\,.$$

3. Τι ονομάζουμε συζυγή ενός μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i$ και τι ιδιότητες έχει ;

Απάντηση

Συζυγή του μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i$ λέμε τον αριθμό $\bar{z}=\alpha-\beta i$.

Ο συζυγής του z συμβολίζεται επίσης και με $\overline{\alpha+\beta i}$. Είναι δηλαδή :

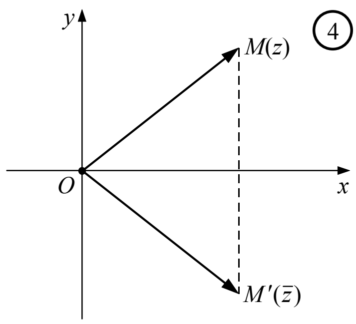
$$\boldsymbol{\overline{\alpha+\beta i}=\alpha-\beta i}\ .$$

Επειδή είναι και $\overline{\alpha-\beta i}=\alpha+\beta i$, οι αριθμοί $\alpha+\beta i$, $\alpha-\beta i$ λέγονται **συζυγείς μιγαδικοί**.

4. Να γράψετε τις ιδιότητες των συζυγών αριθμών και να αποδείξετε ότι $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$.

Απάντηση

● Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες $M(\alpha,\beta)$ και $M'(\alpha,-\beta)$ δύο συζυγών μιγαδικών $z=\alpha+\beta i$ και $\bar{z}=\alpha-\beta i$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.



● Για δύο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $z=\alpha+\beta i$ και $\bar{z}=\alpha-\beta i$ μπορούμε εύκολα, με εκτέλεση των πράξεων, να διαπιστώσουμε ότι:

$$\boldsymbol{z+\bar{z}=2\alpha}$$
$$\boldsymbol{z-\bar{z}=2\beta i}\,.$$

● Αν $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$ είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, τότε:

1. $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$
2. $\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$
3. $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.
5. $\overline{z_1+z_2+\cdots+z_\nu}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\cdots+\bar{z}_\nu$
6. $\overline{z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_\nu}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2\cdot\ldots\cdot\bar{z}_\nu$

Θεώρημα

5. Να αποδειχθεί ότι : $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$

Απόδειξη

Η απόδειξη της ιδιότητας $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$ γίνεται ως εξής :

Αν $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$, τότε έχουμε :

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)}=\overline{(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i}$$
$$=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)i=(\alpha-\beta i)+(\gamma-\delta i)=\bar{z}_1+\bar{z}_2$$

6. Πώς υπολογίζουμε τις δυνάμεις του i ;

Απάντηση

Για να υπολογίσουμε συγκεκριμένη δύναμη του i, γράφουμε τον εκθέτη ν στη μορφή $\nu=4\rho+\upsilon$, όπου ρ είναι το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4, οπότε έχουμε:

$$i^\nu=i^{4\rho+\upsilon}=i^{4\rho}i^\upsilon=(i^4)^\rho i^\upsilon=1^\rho i^\upsilon=i^\upsilon=\begin{cases}1\ , & \text{αν}\ \ \upsilon=0\\ i\ , & \text{αν}\ \ \upsilon=1\\ -1\ , & \text{αν}\ \ \upsilon=2\\ -i\ , & \text{αν}\ \ \upsilon=3\end{cases}$$

$$=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)i=(\alpha-\beta i)+(\gamma-\delta i)=\bar{z}_1+\bar{z}_2\,.$$

Θεώρημα

7. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ **με** $\alpha,\beta,\gamma\in R$ και $\alpha\neq 0$.

Απόδειξη

Έστω η εξίσωση $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$, με $\alpha,\beta,\gamma\in R$ και $\alpha\neq 0$.

Μετασχηματίζουμε την εξίσωση , με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη μορφή:

$$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2}\,,$$

όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης. Έτσι, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\Delta>0$, τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις: $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν $\Delta=0$, τότε έχει μια διπλή πραγματική λύση: $z=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$
- Αν $\Delta<0$, τότε, επειδή $\dfrac{\Delta}{4\alpha^2}=\dfrac{(-1)(-\Delta)}{4\alpha^2}=\dfrac{i^2(\sqrt{-\Delta})^2}{(2\alpha)^2}=\left(\dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$, η εξίσωση γράφεται:

$$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2.$$

Άρα οι λύσεις της είναι: $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$, οι οποίες είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

Να αποδείξετε το παρακάτω κριτήριο :

Για ένα μιγαδικό αριθμό z ισχύει ότι:

- Ο z είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $z=\bar{z}$
- Ο z είναι φανταστικός, αν και μόνο αν $z=-\bar{z}$.

Απόδειξη

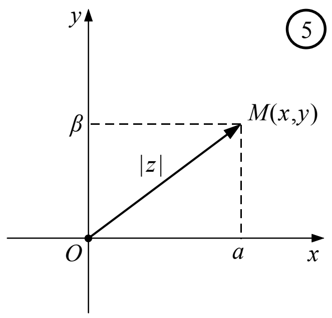
Δες το τετράδιό σου ή να γίνει ξανά στην τάξη.

8. Τι λέμε μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού ;

Απάντηση

Έστω $M(x,y)$ η εικόνα του μιγαδικού $z=x+yi$ στο μιγαδικό επίπεδο. Ορίζουμε ως **μέτρο** του z την απόσταση του M από την αρχή O, δηλαδή

$$\boxed{|z|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2}}$$



9. Να γράψετε τις ιδιότητες του μέτρου μιγαδικού αριθμού.

Απάντηση

Ισχύει ότι :

- $|z|=|\bar{z}|=|-z|$
- $|z|^2=z\cdot\bar{z}$
- $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
- $|z^\nu|=|z|^\nu$.
- $\boxed{\big||z_1|-|z_2|\big|\le|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|}$

Θεώρημα

10. Να αποδείξετε ότι : $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

Απόδειξη

Έχουμε:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$
$$\Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$$
$$\Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$$

και επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει, θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

11.α) Τι εκφράζει γεωμετρικά το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών , δηλαδή ο αριθμός

$$\boxed{|z_1 - z_2|}$$

β) Τι παριστάνει η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$;

γ) Τι παριστάνει η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$;

Απάντηση

α) "Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους".

Δηλαδή:

$$\boxed{(M_1 M_2) = |z_1 - z_2|}$$

β) Η εξίσωση

$$|z - z_0| = \rho \text{ , } \rho > 0$$

παριστάνει τον **κύκλο** με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ.

γ) Η εξίσωση

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

παριστάνει τη **μεσοκάθετο** του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.

Η θεωρία στα Μαθηματικά κατεύθυνσης :

Ορισμοί – Ιδιότητες - Προτάσεις – Θεωρήματα – Αποδείξεις

Β. Γενικό μέρος των συναρτήσεων

1. Τι λέμε σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A ;

Απάντηση

Σύνολο τιμών της f λέμε το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$. Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{y \mid y = f(x) \ \text{ για κάποιο } \ x \in A\}.$$

Το σύνολο τιμών της f στο A συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(A)}$.

2. Τι λέμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A ;

Απάντηση

Γραφική παράσταση της f λέμε το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, με $x \in A$.

Σχόλια

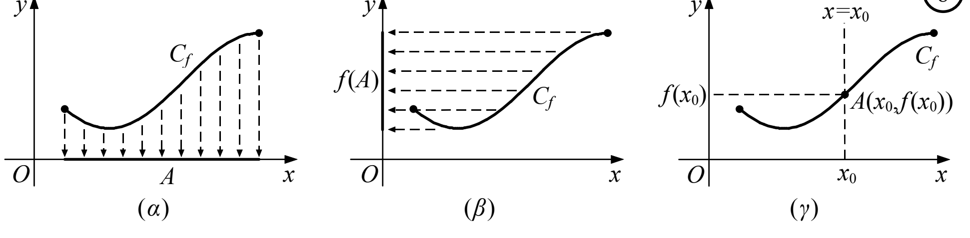
- Η **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με $\boldsymbol{C_f}$.

- Η εξίσωση, λοιπόν, $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f. Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.
- Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, τότε:

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f.

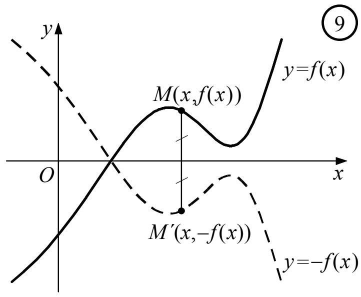
β) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f.

γ) Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f (Σχ. 8).

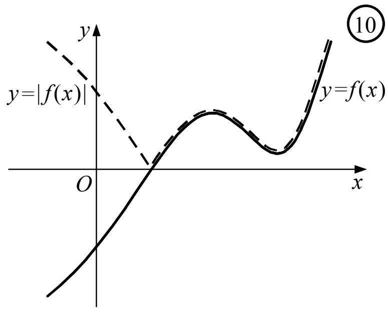


- Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f, μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $-f$ και $|f|$.

α) Η γραφική παράστασης της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f, γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x,-f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x,f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$. (Σχ. 9).



β) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. (Σχ. 10).



3. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων

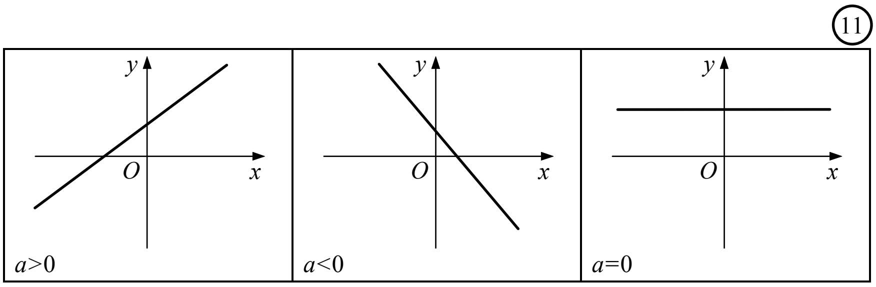
α) $f(x)=\alpha x+\beta$ β) $f(x)=\alpha x^2$, $\alpha\neq 0$ γ) $f(x)=\alpha x^3$, $\alpha\neq 0$

δ) $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$, $\alpha\neq 0$ ε) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{|x|}$.

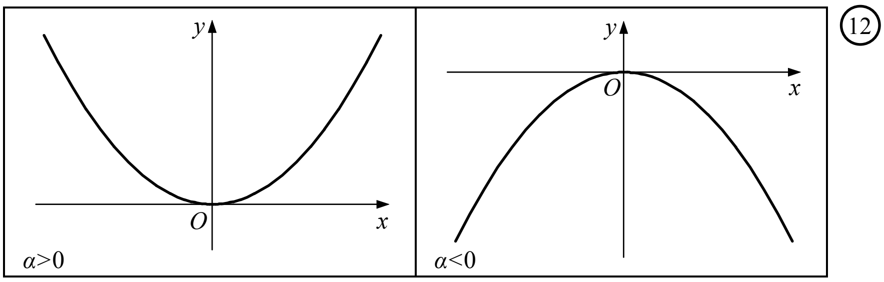
Απάντηση

Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται παρακάτω :

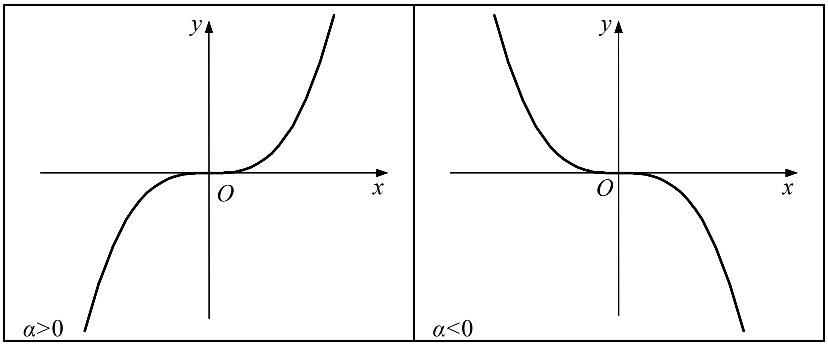
α) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$



β) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2$, $\alpha\neq 0$.

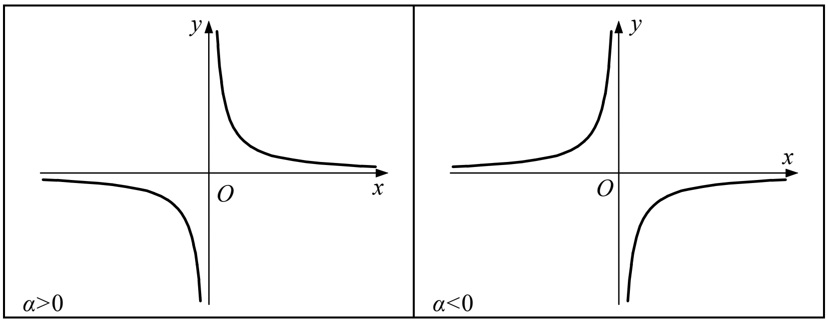


γ) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3$, $\alpha\neq 0$.



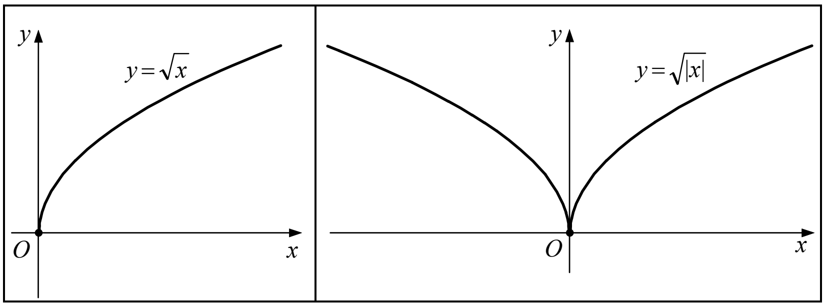
13

δ) Η ρητή συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha}{x}, \quad \alpha \neq 0$.



14

ε) Οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}, \quad g(x)=\sqrt{|x|}$.



15

4. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων :

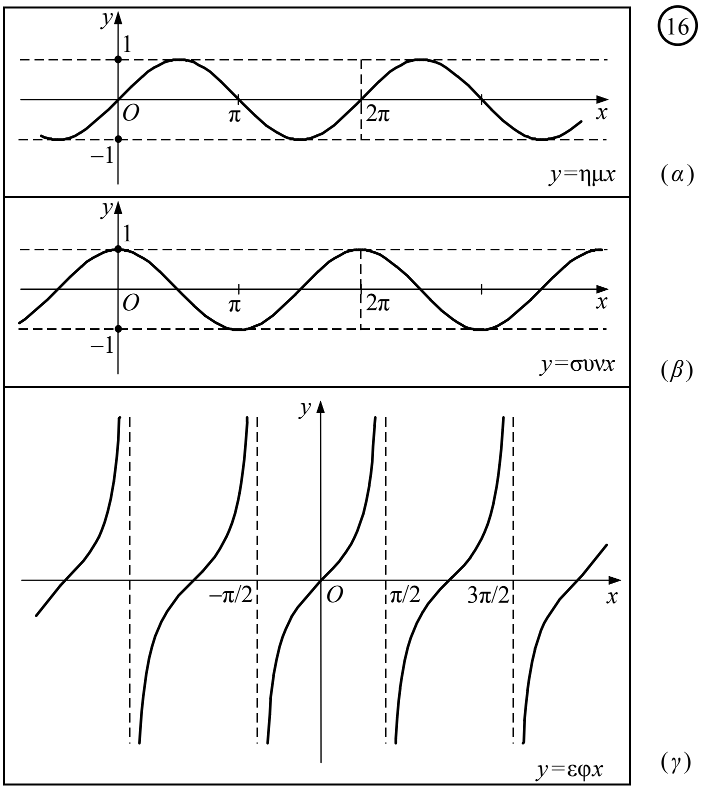
α) $f(x)=\eta\mu x$, $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f(x)=\varepsilon\varphi x$

β) $f(x)=\alpha^x, \quad 0<\alpha\neq 1$ γ) $f(x)=\log_\alpha x, \quad 0<\alpha\neq 1$

Απάντηση

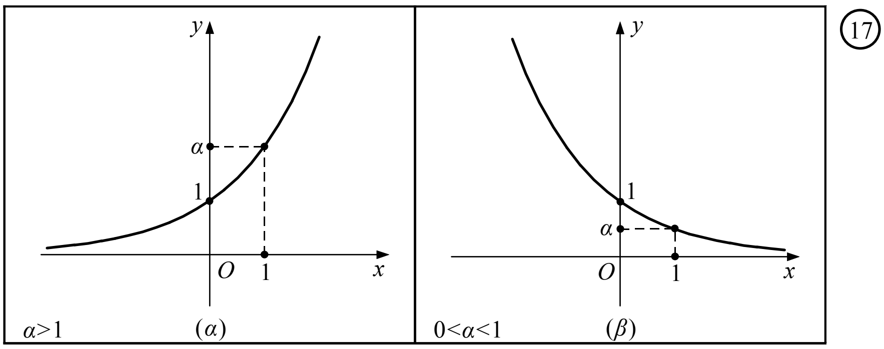
Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται παρακάτω :

α) Οι τριγωνικές συναρτήσεις : $f(x)=\eta\mu x$, $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f(x)=\varepsilon\varphi x$



Υπενθυμίζουμε ότι, οι συναρτήσεις $f(x)=$ ημx και $f(x)=$ συνx είναι περιοδικές με περίοδο $T=2\pi$, ενώ η συνάρτηση $f(x)=$ εφx είναι περιοδική με περίοδο $T=\pi$.

β) Η εκθετική συνάρτηση $\boldsymbol{f(x)=\alpha^{x}}$, $\boldsymbol{0<\alpha\neq 1}$.

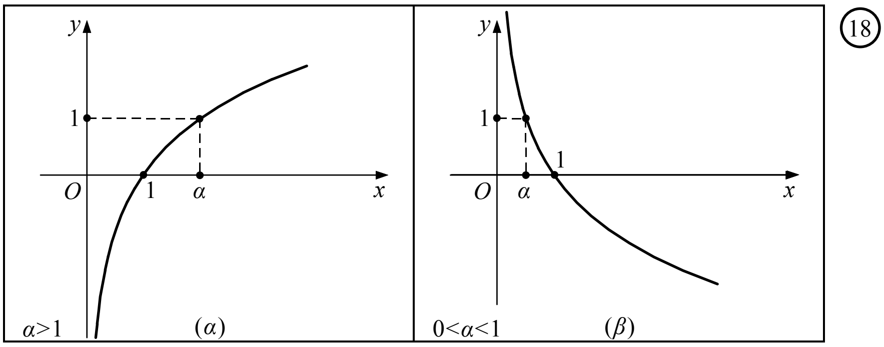


Ιδιότητες

Υπενθυμίζουμε ότι:

- Αν $\boldsymbol{\alpha>1}$, τότε: $\alpha^{x_1}<\alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1<x_2$
- Αν $\boldsymbol{0<\alpha<1}$, τότε: $\alpha^{x_1}<\alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1>x_2$.

γ) Η λογαριθμική συνάρτηση $\boldsymbol{f(x)=\log_{\alpha}x}$, $\boldsymbol{0<\alpha\neq 1}$



Ιδιότητες

Υπενθυμίζουμε ότι:

1) $\log_\alpha x = y \Leftrightarrow \alpha^y = x$

2) $\log_\alpha \alpha^x = x$ και $\alpha^{\log_\alpha x} = x$

3) $\log_\alpha \alpha = 1$ και $\log_\alpha 1 = 0$

4) $\log_\alpha (x_1 x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$

5) $\log_\alpha \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2$

6) $\log_\alpha x_1^k = \kappa \log_\alpha x_1$

7) Αν $\alpha > 1$, τότε: $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$, ενώ **αν** $0 < \alpha < 1$, τότε

$$\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2 .$$

8) $\alpha^x = e^{x\ln\alpha}$, αφού $\alpha = e^{\ln\alpha}$.

5. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες ;

Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

6. Πώς ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης , αφαίρεσης , γινομένου και πηλίκου δύο συναρτήσεων f, g;

Απάντηση

Ορίζουμε ως άθροισμα $f+g$, διαφορά $f-g$, γινόμενο fg και πηλίκο $\dfrac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad , \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad , \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} .$$

Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$ και fg είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο

$$\{x \mid x \in A \quad \text{και} \quad x \in B, \quad \text{με} \quad g(x) \neq 0\}.$$

7. Τι λέμε σύνθεση της συνάρτησης f με τη συνάρτηση g ;

Απάντηση

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο

$$(gof)(x) = g(f(x)).$$

Σχόλια

α) Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}.$$

Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται ,αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

β) ● Γενικά, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι gof και fog, τότε αυτές *δεν είναι υποχρεωτικά* ίσες.

● Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει

$$ho(gof) = (hog)of.$$

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $hogof$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

8. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση

● Η συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα *διάστημα* Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

● Η συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα *διάστημα* Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

9. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_o \in A$ ολικό μέγιστο και πότε ολικό ελάχιστο ;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \le f(x_0) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A$$

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \ge f(x_0) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A \quad .$$

10. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται $1-1$;

Απάντηση

Μια συνάρτηση $f:A \to R$ λέγεται **συνάρτηση $1-1$**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{Αν} \quad x_1 \ne x_2, \quad \text{τότε} \quad f(x_1) \ne f(x_2).$$

Σχόλια

α) Μια συνάρτηση $f:A \to R$ είναι **συνάρτηση $1-1$**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν} \quad f(x_1) = f(x_2), \quad \text{τότε} \quad x_1 = x_2.$$

Είναι φανερό από τον ορισμό της συνάρτησης ότι ισχύει η ισοδυναμία :

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

β) Από τον ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν:

- Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.
- Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.
- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση "$1-1$".Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Υπάρχουν δηλαδή συναρτήσεις που είναι $1-1$ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

11. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A αντιστρέφεται και πώς ;

Απάντηση

Μια συνάρτηση $f:A \to R$ αντιστρέφεται, αν και μόνο αν είναι $1-1$.Η αντίστροφη συνάρτηση της f που συμβολίζεται με f^{-1} ορίζεται από τη σχέση :

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

Σχόλια

α) Ισχύει ότι :

$$\boldsymbol{f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A} \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in f(A)}.$$

β) Η αντίστροφη της f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f,

και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f .

γ) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Η θεωρία στα Μαθηματικά κατεύθυνσης :

Ορισμοί – Ιδιότητες - Προτάσεις – Θεωρήματα – Αποδείξεις

Γ. Όρια συναρτήσεων

1. Ποια πρόταση συνδέει το όριο της f στο $\mathrm{x_o}$ και τα πλευρικά όρια της f στο $\mathrm{x_o}$;

Απάντηση

Ισχύει ότι :

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$$

Παρατηρήσεις στο όριο

α) Ισχύει ότι :

$$\boxed{\begin{array}{llll} (\alpha) & \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell & \Leftrightarrow & \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-\ell)=0 \\ (\beta) & \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell & \Leftrightarrow & \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell \end{array}}$$

β) Τους αριθμούς $\ell_1=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ και $\ell_2=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ τους λέμε **πλευρικά όρια** της f στο x_0 και συγκεκριμένα το ℓ_1 **αριστερό όριο** της f στο x_0, ενώ το ℓ_2 **δεξιό όριο** της f στο x_0.

γ) — Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε “κοντά στο x_0”, δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ’ ένα σύνολο της μορφής

$$(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta) \qquad \text{ή} \qquad (\alpha,x_0) \qquad \text{ή} \qquad (x_0,\beta).$$

— Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. 39α, 39β) ή να μην ανήκει σ’ αυτό .

— Η τιμή της f στο x_0, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 (Σχ. 39α) ή διαφορετική από αυτό.

δ) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$

2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει κοντά στο $\mathrm{x_o}$ μια ιδιότητα P;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέμε ότι έχει **κοντά στο x_0** μια ιδιότητα P, όταν ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

α) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα P.

β) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α, x_0), έχει σ' αυτό την ιδιότητα P, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (x_0, β).

γ) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0, β), έχει σ' αυτό την ιδιότητα P, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (α, x_0).

3. Να γράψετε τις ιδιότητες των ορίων ορίου στο x_0 .

Απάντηση

Για το όριο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

α) Θεώρημα 1ο

- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

β) Θεώρημα 2ο

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$$

γ) Θεώρημα 3ο

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε:

1. $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$

2. $\lim_{x\to x_0}(\kappa f(x)) = \kappa \lim_{x\to x_0} f(x)$, για κάθε σταθερά $\kappa \in \mathbb{R}$

3. $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$ **4.** $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim_{x\to x_0} g(x) \ne 0$

5. $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|$ **6.** $\lim_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \ge 0$ κοντά στο x_0.

δ) Θεώρημα 4ο

— Έστω τώρα το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.Είναι τότε :

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$$

—Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \ne 0$. Θα είναι τότε

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \quad \textbf{όπου } Q(x_0) \ne 0$$

.

ε) Θεώρημα 5ο

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$,

τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$

Κριτήριο παρεμβολής.

στ) Ισχύει ότι

- $|ημx| \le |x|$, για κάθε $x \in R$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$.
- $\lim_{x\to x_0} ημx = ημx_0$
- $\lim_{x\to x_0} συνx = συνx_0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{ημx}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{συνx - 1}{x} = 0$

4 . Πώς υπολογίζουμε το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο x_0 .

Απάντηση

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο σημείο x_0, δηλαδή το $\lim_{x\to x_0} f(g(x))$, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u = g(x)$.
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$ και
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim_{u\to u_0} f(u)$.

Αν $g(x) \ne u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u).$$

5 . Να γράψετε τις ιδιότητες του άπειρου ορίου στο x_0 .

Απάντηση

Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και για τα άπειρα όρια συναρτήσεων, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

α) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$

β) $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$.

γ) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, ενώ αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))=-\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))=+\infty$.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

στ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$

και $f(x)<0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.

ζ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$. η) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=+\infty$.

θ) i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2\nu}}=+\infty$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty$, $\nu\in\mathbb{N}$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=-\infty$, $\nu\in\mathbb{N}$.

ι) Για το άθροισμα και το γινόμενο ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα :

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_0\in$○						
το όριο της f είναι:	$\alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f+g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)

Αν στο $x_0\in\mathbb{R}$,										
το όριο της f είναι:	$\alpha>0$	$\alpha<0$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της fg είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Σχόλιο

Οι παρακάτω μορφές λέγονται **απροσδιόριστες** μορφές :

$$(+\infty)+(-\infty)\ ,\ \mathbf{0}\cdot(\pm\infty)\ ,\ (+\infty)-(+\infty)\ ,\ (-\infty)-(-\infty)\ ,\ \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

6 . Να γράψετε τις ιδιότητες για το όριο στο άπειρο .

Απάντηση

α) Για τον υπολογισμό του ορίου στο $+\infty$ ή $-\infty$ ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων χρειαζόμαστε τα παρακάτω βασικά όρια:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\nu = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^\nu} = 0$, $\quad \nu \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\nu = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^\nu} = 0$, $\quad \nu \in \mathbb{N}^*$.

β) Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0$, με $\alpha_\nu \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} (\alpha_\nu x^\nu) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$$

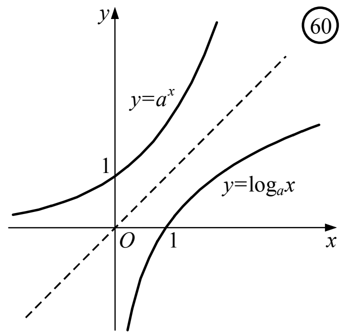
γ) Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa + \beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_\nu \neq 0$, $\beta_\kappa \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)$$

δ) Για το όριο **εκθετικής - λογαριθμικής** συνάρτησης ισχύει ότι

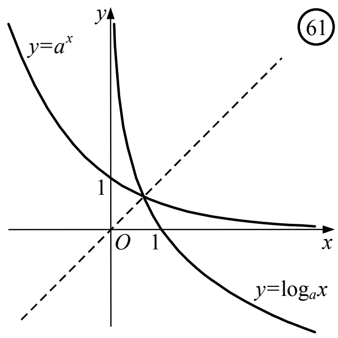
- Αν $\alpha > 1$ (Σχ. 60), τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$,	$\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 0} \log_\alpha x = -\infty$,	$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = +\infty$



- Αν $0 < \alpha < 1$ (Σχ. 61), τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$,	$\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$
$\lim\limits_{x\to 0} \log_\alpha x = +\infty$,	$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = -\infty$



Σχόλια

- Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$.
- Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $-\infty$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$.
- Για τα όρια στο $+\infty$, $-\infty$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 με την προϋπόθεση ότι:

— οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και
— δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.

Η θεωρία στα Μαθηματικά κατεύθυνσης :

Ορισμοί – Ιδιότητες - Προτάσεις – Θεωρήματα – Αποδείξεις

Δ1. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (Ορισμοί)

Ορισμός

1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται **συνεχής στο x_0;**

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο x_0**, όταν

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Σχόλιο: Ισοδύναμα, θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο x_0**, όταν $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0$

2. Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι **συνεχής στο x_0;**

Απάντηση

Μια συνάρτηση f **δεν είναι** συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

α) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή

β) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$ στο σημείο x_0.

Ορισμός

3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται απλώς **συνεχής;**

Απάντηση

Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, **συνεχής συνάρτηση**.

Ορισμός

4. Ποιές συναρτήσεις είναι γνωστό ότι είναι **συνεχείς;**

Απάντηση

— **Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P είναι συνεχής**, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0).$$

— **Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής**, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

— **Οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχείς**, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0.$$

Τέλος, αποδεικνύεται (χωρίς όμως να απαιτείται η απόδειξη από τους μαθητές) ότι:

— **Οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha^x$ και $g(x)=\log_\alpha x$, $0<\alpha\neq 1$ είναι συνεχείς.**

5. **Θεώρημα**

Από τον ορισμό της συνέχειας στο x_0 και τις ιδιότητες των ορίων προκύπτει ότι:
Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις: $f+g$, $c\cdot f$, όπου $c\in\mathbb{R}$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$, $|f|$ και $\sqrt[\nu]{f}$
με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0.

6. **Θεώρημα**

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

Ορισμός

7. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα** (α,β)**;**

Απάντηση

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα** (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β). (Σχ. 63α)

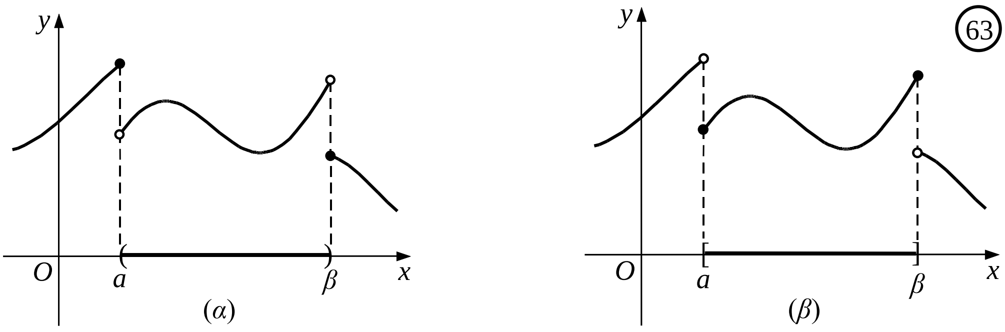
Ορισμός

8. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$**;**

Απάντηση

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta) \quad (\Sigma\chi.\ 63\beta)$$



Σχόλιο:

Μια συνάρτηση f μπορεί να είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και να μην είναι συνεχής υποχρεωτικά συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της

Δ2. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

9. **Θεώρημα Bolzano**

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

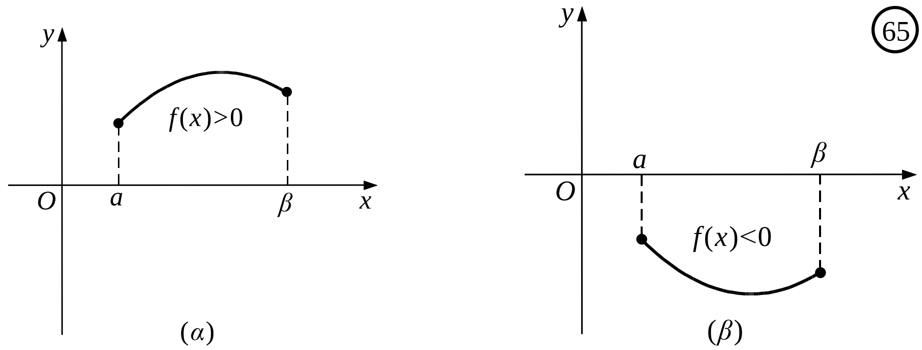
$$f(x_0)=0$$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).
ή αλλιώς,
η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.

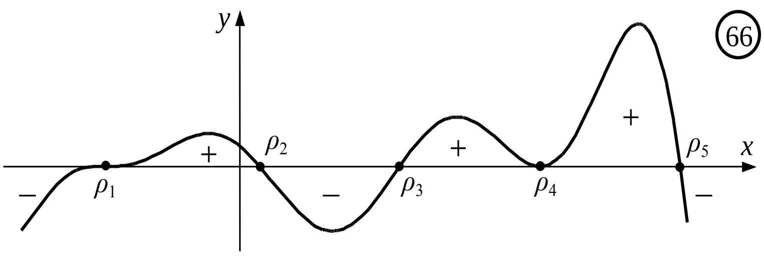
ΣΧΟΛΙΟ

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

— Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. (Σχ. 65)



— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.



10. Πως μπορούμε να προσδιορίσουμε το πρόσημου μιας συνεχούς συνάρτησης f;

Απάντηση

α) Βρίσκουμε τις ρίζες της f.

β) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.

11. **Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (γενίκευση του θεωρήματος του Bolzano)**

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0)=\eta$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

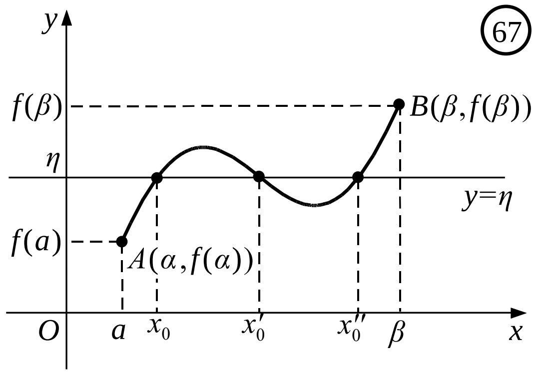
Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,

αφού

$g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και

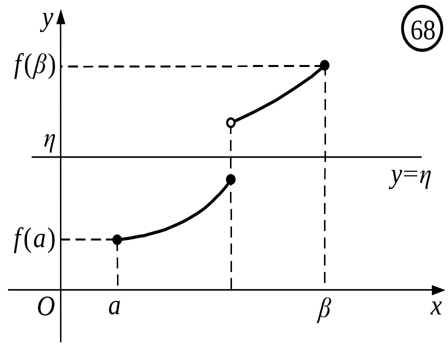
$g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.



Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$. ■

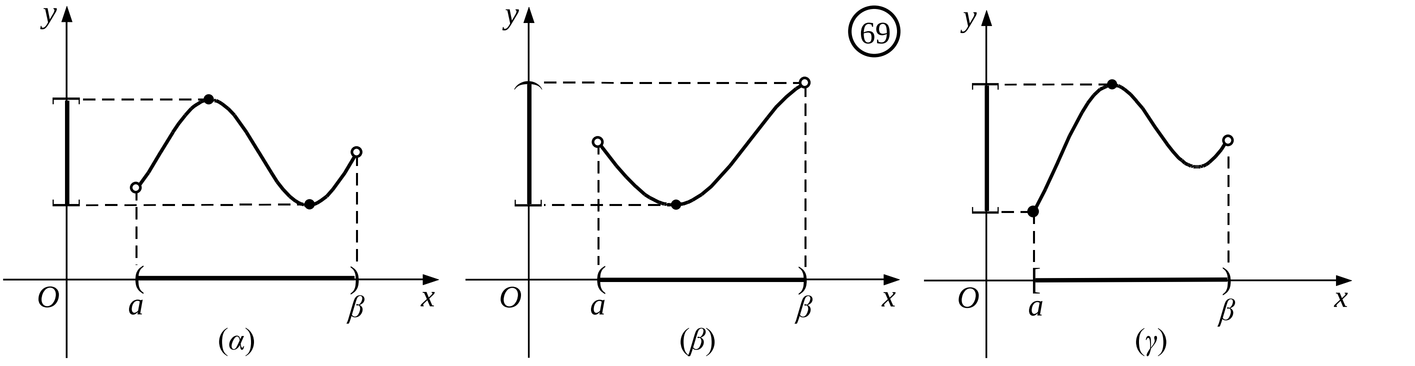
ΣΧΟΛΙΟ

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.



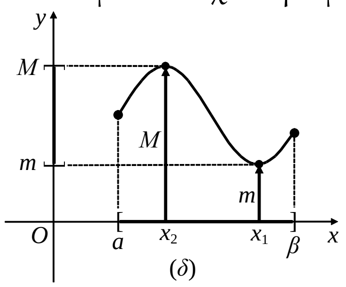
12. **Πρόταση**

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.



Στην ειδική περίπτωση που το Δ είναι ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

13. **Θεώρημα (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)**
Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m. (Σχ. 69δ)



(δ)

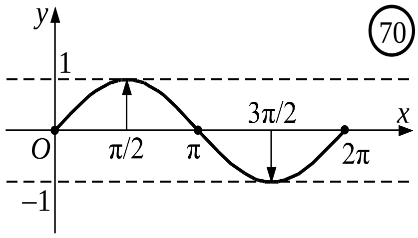
Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$$\boldsymbol{m \le f(x) \le M}, \quad \textbf{για κάθε} \quad \boldsymbol{x \in [\alpha,\beta]}.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $\boldsymbol{[m,M]}$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

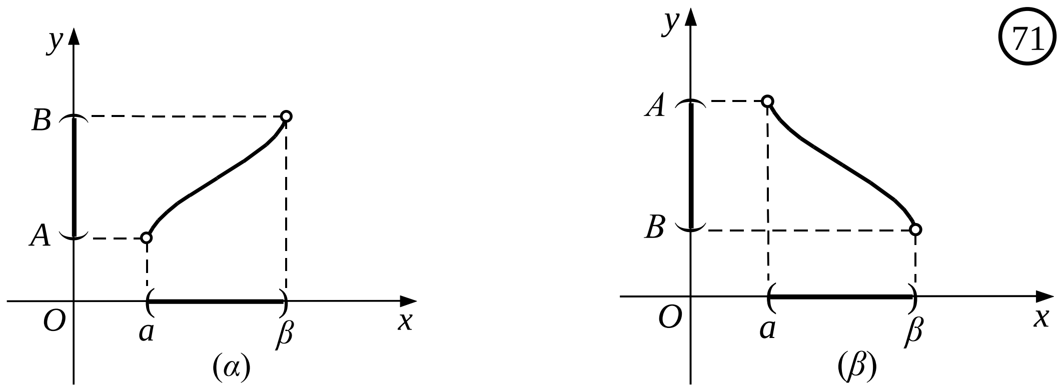
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, $x \in [0,2\pi]$ έχει σύνολο τιμών το $[-1,1]$, αφού είναι συνεχής στο $[0,2\pi]$ με $m=-1$ και $M=1$.



14. Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B) (Σχ. 71α), όπου

$$A = \lim_{x\to\alpha^+} f(x) \quad \text{και} \quad B = \lim_{x\to\beta^-} f(x).$$

Αν, όμως, η f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B,A) (Σχ. 71β).



Η θεωρία στα Μαθηματικά κατεύθυνσης :

Ορισμοί – Ιδιότητες - Προτάσεις – Θεωρήματα – Αποδείξεις

$Γ_1$. Διαφορικός λογισμός (Κανόνες παραγώγισης)

1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο** $\boldsymbol{x_0}$ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Σχόλια

α) Αν, τώρα, στην ισότητα $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ θέσουμε $x=x_0+h$, τότε έχουμε

$$\boldsymbol{f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}.$$

β) Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f, τότε:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν στο R τα όρια

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ ,\qquad \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι ίσα.

2. Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$.

Απάντηση

- Η εξίσωση της *ε φ α π τ ο μ έ ν η ς (ε) της* C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$\boxed{y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)}$$

Σχόλιο

Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$ θα τη λέμε και **κλίση της C_f στο A** ή **κλίση της f στο x_0**.

Θεώρημα

3. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0),$$

οπότε θα είναι :

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right]$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0)$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0. ■

Σχόλιο

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Ισχύει όμως ότι :

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Ορισμός

4. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται :

α) Παραγωγίσιμη στο σύνολο Α

β) Παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

γ) Παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$

Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A. Θα λέμε ότι:

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

β) Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα** (α, β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

γ) Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in R \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in R .$$

5. Να αποδείξετε ότι :

α) Αν $f(x)=c$, τότε $f'(x)=0$ **β)** Αν $f(x)=x$, τότε $f'(x)=1$

γ) Αν $f(x)=x^{\nu}$, με $\nu\in N-\{0,1\}$, τότε $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$

δ) Αν $f(x)=\sqrt{x}$, τότε $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$

Απόδειξη

α) Για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0 .$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0 ,$$

δηλαδή $(c)'=0$.

β) Για $x\neq x_0$ ισχύει ότι :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1 .$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1 ,$$

δηλαδή $(x)'=1$.

γ) Αν x_0 είναι ένα σημείο του ○, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1} ,$$

Επομένως :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1} ,$$

δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$. ■

δ) Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} ,$$

οπότε :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Σχόλια – Τύποι

- Έστω συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

  $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, δηλαδή

$$\boxed{(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x}$$

- Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

  $f'(x)=-\eta\mu x$, δηλαδή

$$\boxed{(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x}$$

- Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

  $f'(x)=e^x$, δηλαδή

$$\boxed{(e^x)'=e^x}$$

- Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και

  ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, δηλαδή

$$\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x}}$$

6. Θεώρημα

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Απόδειξη

Για $x\neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Σχόλια – Τύποι

Α. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

Ισχύει επομένως ότι :

- Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει:

$$\boldsymbol{(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}.$$

- Αν f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και $c\in\mathrm{R}$, επειδή $(c)'=0$, σύμφωνα με το θεώρημα (2) έχουμε:

$$\boxed{(cf(x))'=cf'(x)}$$

Β. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)\neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Ισχύει επομένως ότι :

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει $g(x)\neq 0$, τότε για κάθε $x\in\Delta$ έχουμε:

$$\boldsymbol{\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}}.$$

Γ. Έστω η συνάρτηση $\mathrm{f(x)=x^{-\nu}}$, $\nu\in\mathrm{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει $\mathrm{f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}}$, δηλαδή

$$\boxed{(\mathrm{x}^{-\nu})'=-\nu\mathrm{x}^{-\nu-1}}$$

Απόδειξη

Πράγματι, για κάθε $\mathrm{x}\in\mathrm{N}^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)' = \frac{(1)'x^{\nu} - 1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}.$$

Δ. ● Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R - \{x|\sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή

$$\boxed{(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}$$

Απόδειξη

Πράγματι, για κάθε $x \in R - \{x|\sigma\upsilon\nu x = 0\}$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}. \quad \blacksquare$$

● Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R - \{x|\eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, δηλαδή

$$\boxed{(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}}$$

7. Θεώρημα

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Σχόλια

Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$\boldsymbol{(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}.$$

Δηλαδή, αν $\boldsymbol{u = g(x)}$, τότε

$$\boldsymbol{(f(u))' = f'(u) \cdot u'}.$$

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, έχουμε τον τύπο

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

που είναι γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας.**

8.Θεώρημα

Να αποδείξετε ότι :

α) Η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha \in R-Q$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει

$$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1},$$

β) Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^{x}$, $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\alpha^{x}\ln\alpha$.

γ) Η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in R^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $x\in R^*$ και ισχύει

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$$

Απόδειξη

α) Πράγματι, αν $y=x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha\ln x$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=(e^{u})'=e^{u}\cdot u'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

β) Πράγματι, αν $y=\alpha^{x}=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=(e^{u})'=e^{u}\cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^{x}\ln\alpha.$$

γ) Πράγματι·

— αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, ενώ

— αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$. Επομένως,

$$y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$$

και άρα $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

Σχόλιο

Τις παραπάνω αποδείξεις μπορούμε να τις απλοποιήσουμε. Αυτό να γίνει στην τάξη από τον καθηγητή.

Γ_2. Διαφορικός λογισμός

(Βασικά Θεωρήματα-Συνέπειες ΘΜΤ - Μονοτονία)

9. Τι λέμε ρυθμό μεταβολής του μεγέθους y ως προς το μέγεθος x για $x=x_0$, αν $y=f(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ;

Απάντηση

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

10. Να διατυπώσετε τι θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία.

Απάντηση

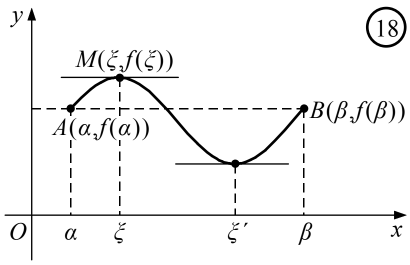
Το θεώρημα του Rolle διατυπώνεται ως εξής :

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- **συνεχής στο κλειστό διάστημα** $[\alpha, \beta]$
- **παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα** (α, β) **και**
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ **τέτοιο, ώστε** $f'(\xi) = 0$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



11. Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση

Το θεώρημα της μέσης τιμής διατυπώνεται ως εξής :

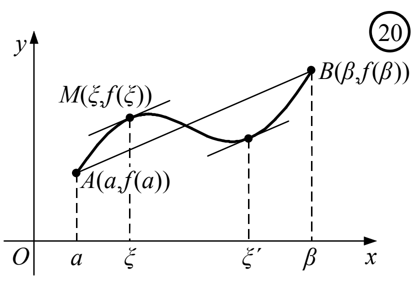
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- **συνεχής στο κλειστό διάστημα** $[\alpha, \beta]$ **και**
- **παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα** (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ **τέτοιο, ώστε:**

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



12. Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο x του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Απάντηση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}. \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$. ■

13. Θεώρημα

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο x του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

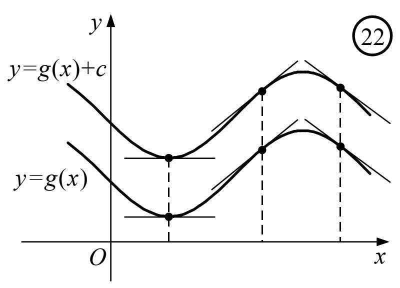
$$f(x)=g(x)+c$$

Απάντηση

Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$. ■



Σχόλιο

Τα παραπάνω θεωρήματα (3 και 4) ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

14.Πρόταση(χωρίς απόδειξη)

Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι

$$f'(x) = f(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in R,$$

τότε $f(x) = ce^x$ για κάθε $x \in R$.Αντί του R μπορούμε να έχουμε τυχαίο διάστημα Δ.

15. Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση *f*, η οποία είναι *σ υ ν ε χ ή ς* σε ένα διάστημα *Δ*.

• Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το *Δ*.

• Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το *Δ*.

Απάντηση

● Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

● Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως. ■

Σχόλιο

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η *f* είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο *Δ*, η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του *Δ*.

Γ$_3$. Διαφορικός λογισμός (ακρότατα- σημεία καμπής – ασύμπτωτες- κανόνες de L'Hospital)

16. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο ;

Απάντηση

α) Μια συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού *A*, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε :

$$f(x) \le f(x_0) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της *f***.

β) Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο,** όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε :

$$f(x) \geq f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της *f***.

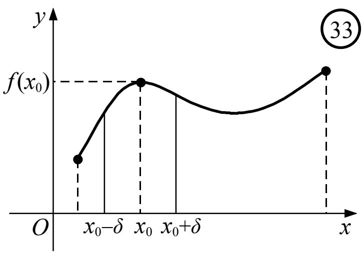
Σχόλιο

Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει, ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα. Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης.

Θεώρημα Fermat

17. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι : $f'(x_0) = 0$

Απόδειξη



Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και

$f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ■

18. **α)** Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

β) Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ **;**

Απάντηση

α) **Κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ λέγονται τα *εσωτερικά* σημεία του Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν.

β) Οι *πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων* μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.**
2. **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.**
3. **Τα άκρα του Δ** (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

19. Πώς βρίσκουμε τα ολικά ακρότατα σε μια συνεχή συνάρτηση f σε ένα κλειστό διάστημα ;

Απάντηση

Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου της συνάρτησης f σε ένα κλειστό διάστημα εργαζόμαστε ως εξής:

1. **Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f.**
2. **Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.**
3. **Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της f.**

20. Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

i) Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

ii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

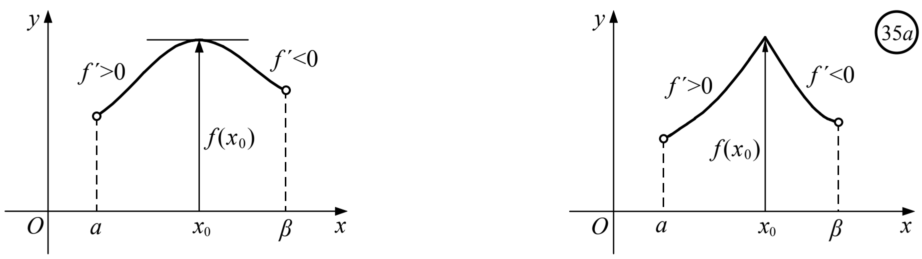
Απόδειξη

i) Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x\in(\alpha,x_0]. \qquad (1)$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x\in[x_0,\beta). \qquad (2)$$



Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Έστω ότι

$$f'(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της *f*. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. ■

21. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται κυρτή και πότε κοίλη σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση

- Η συνάρτηση f λέγεται **κυρτή ή ότι στρέφει τα κοίλα άνω** σ' ένα διάστημα *Δ* όταν είναι συνεχής στο Δ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του *Δ*.

- Η συνάρτηση *f* λέγεται κοίλη ή ότι στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** στο *Δ*, αν είναι συνεχής στο Δ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του *Δ*.

22. Να διατυπώσετε το θεώρημα που αφορά τα κοίλα και το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου της f .

Απάντηση

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Έστω μια συνάρτηση f *σ υ ν ε χ ή ς* σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* του Δ.

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

23. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής μιας συνάρτησης f ;

Απάντηση

Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f , όταν :.

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Σχόλιο

Όταν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε λέμε ότι η ***f* παρουσιάζει στο x_0 καμπή** και το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμπής**.

24. Ποιο θεώρημα αφορά τα σημεία καμπής μιας δυο φορές παραγωγίσιμης συνάρτησης f ;

Απάντηση

Για τα σημεία καμπής ισχύει το επόμενο θεώρημα :

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$

Ερώτηση :

Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα ;

Απάντηση

Οι *π ι θ α ν έ ς θ έ σ ε ι ς σ η μ ε ί ω ν κ α μ π ή ς* μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

i) **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται .**

ii) **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' .**

Μέθοδος –Κριτήριο :

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
- ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f.

25. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f;

Απάντηση

Η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f. , αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$

26. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

Απάντηση

Η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$), όταν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$).

27. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$;

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$, αντιστοίχως αν $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.

28. Με ποιες σχέσεις(τύπους) βρίσκουμε τις ασύμπτωτες της μορφής $y = \lambda x + \beta$;

Απάντηση

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in R \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in R,$$

αντιστοίχως :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in R \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in R .$$

Χρήσιμα σχόλια

1. Αποδεικνύεται ότι:

— Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

— Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

2. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:

— Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.

— Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

— Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty,\alpha)$.

29. Να διατυπώσετε τους κανόνες de L'Hospital .

Απάντηση

1ος Κανόνας

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0\in R\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2ος Κανόνας

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0\in R\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Σχόλιο :

α) Οι παραπάνω τύποι απαιτούν προσοχή κατά την εφαρμογή τους. Να συζητηθούν στην τάξη οι λεπτομέρειες.

β) Οι άλλες απροσδιόριστες μορφές να συζητηθούν στην τάξη με τον καθηγητή σας.

Η θεωρία στα Μαθηματικά κατεύθυνσης :

Ορισμοί – Ιδιότητες - Προτάσεις – Θεωρήματα – Αποδείξεις

ΣΤ. Ολοκληρωτικός λογισμός

1. Τι ονομάζουμε αρχική μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση

Αρχική συνάρτηση ή **παράγουσα** της f στο Δ ονομάζουμε κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

2. Θεώρημα

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι :

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής
$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in R,$$
είναι παράγουσες της f στο Δ .
- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή
$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in R.$$

Απάντηση

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in R$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε , για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν οι σχέσεις

$F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε :

$$G'(x) = F'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

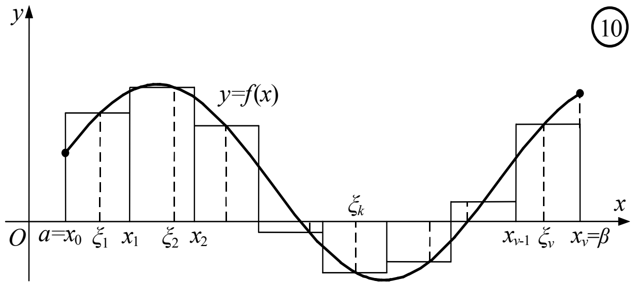
Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$$G(x) = F(x) + c, \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

3*. Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f *συνεχής* στο $[\alpha,\beta]$. Με τα σημεία $\alpha=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_\nu=\beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x=\dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$.



Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa\in[x_{\kappa-1},x_\kappa]$, για κάθε $\kappa\in\{1,2,\ldots,\nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_\nu=f(\xi_1)\Delta x+f(\xi_2)\Delta x+\cdots+f(\xi_\kappa)\Delta x+\cdots+f(\xi_\nu)\Delta x$$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής:

$$S_\nu=\sum_{\kappa=1}^{\nu}f(\xi_\kappa)\Delta x\ .$$

Τα ο όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu}f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ.

Το παραπάνω όριο ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται "ολοκλήρωμα της f από το α στο β". Δηλαδή,

$$\boxed{\int_\beta^\alpha f(x)dx=\lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}f(\xi_\kappa)\Delta x\right)}$$

4. Να γράψετε τις ιδιότητες του ολοκληρώματος $\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

Απάντηση

α) Ισχύει ότι :

- $\int_\alpha^\beta f(x)dx=-\int_\beta^\alpha f(x)dx$
- $\int_\alpha^\alpha f(x)dx=0$
- Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$.

β) Έστω f,g *συνεχείς* συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Τότε ισχύουν

- $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx=\lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$

- $\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)+g(x)]dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$

και γενικά

- $\int_{\alpha}^{\beta}[\lambda f(x)+\mu g(x)]dx=\lambda\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx+\mu\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$

γ) Αν η f είναι *σ υ ν ε χ ή ς* σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\gamma}f(x)dx+\int_{\gamma}^{\beta}f(x)dx$$

δ) Έστω f μια *σ υ ν ε χ ή ς* συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx>0.$$

5. Να γράψετε την παράγωγο της συνάρτησης $F(x)=\int_{\alpha}^{x}f(x)dx\ ,x\in\Delta$, όπου f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ .

Απάντηση

Ισχύει ότι :

$$F'(x)=\left(\int_{a}^{x}f(t)dt\right)'=f(x),\quad \text{για κάθε}\quad x\in\Delta.$$

Σχόλια

α) Γενικότερα έχουμε το εξής θεώρημα :

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x}f(t)dt,\ x\in\Delta,$$

είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_{a}^{x}f(t)dt\right)'=f(x),\quad \text{για κάθε}\quad x\in\Delta.$$

β) Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης προκύπτει ότι:

$$\left(\int_{a}^{g(x)}f(t)dt\right)'=f'(g(x)\cdot g'(x),$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

Θεώρημα

5. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c. \qquad (1)$$

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$.

Επομένως,

$$G(x) = F(x) + G(\alpha),$$

οπότε, για $x=\beta$, έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$$

και άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

6. Να γράψετε τους τύπους της παραγοντικής ολοκλήρωσης και της αντικατάστασης για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Απάντηση

α) Ισχύει ότι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx,$$

όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$.

β) Ισχύει ότι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du,$$

όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$.

7.α) Να γράψετε τον τύπο που δίνει το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$,όταν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής .

β) Να αποδείξετε ότι αν για τις συναρτήσεις f, g είναι $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ δίνεται από τον τύπο :

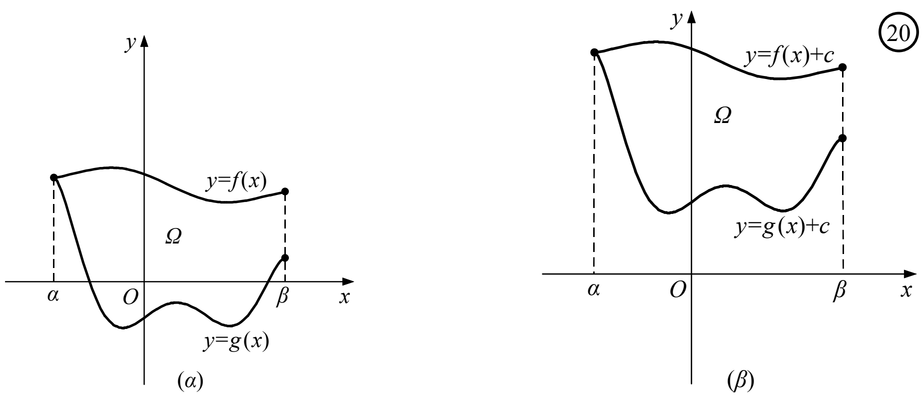
$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$$

Απάντηση

α) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$$

β) Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c\in\mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $f(x)+c\geq g(x)+c\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (Σχ. 20α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω' .



Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), έχουμε:

$$E(\Omega)=E(\Omega')=\int_{\alpha}^{\beta}[(f(x)+c)-(g(x)+c)]dx=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx.$$

Άρα

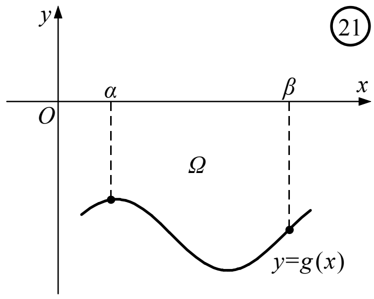
$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$$

Σχόλια

α) Όταν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με $\mathrm{E}(\Omega)=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|\,dx$

β) Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g, με $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με :

$E(\Omega)=-\int_\alpha^\beta g(x)dx$



Απόδειξη

Πράγματι, επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=0$, έχουμε

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$$

$$=\int_\alpha^\beta [-g(x)]dx=-\int_\alpha^\beta g(x)dx\,.$$

Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε

$$\boxed{\mathrm{E}(\Omega)=-\int_\alpha^\beta g(x)dx}$$