Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑΤΑ & ΛΥΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ (2001 – 2011)

&

ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΙΣ Ο.Ε.Φ.Ε. (2003 – 2011)

Επιμέλεια – Συρραφή Θεμάτων

Ζαχαριάδης Λάζαρος - Μαθηματικός

ΘΕΜΑΤΑ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ

ΑΠΟ 2001 ΕΩΣ 2011

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2. Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Μονάδες 7,5

Α.2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

α. $|z|^2 = z\overline{z}$

β. $|z^2| = z^2$

γ. $|z| = -|\overline{z}|$

δ. $|z| = |\overline{z}|$

ε. $|i\,\overline{z}| = |z|$

Μονάδες 5

Β.1. Αν $z_1 = 3+4i$ και $z_2 = 1-\sqrt{3}i$, να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $\lvert z_1 \cdot z_2 \rvert$	**α.** 4
2. $\lvert z_1^2 \rvert$	**β.** 2
3. $\lvert z_2 \rvert^2$	**γ.** 25
4. $-\lvert \overline{z_1} \rvert$	**δ.** –5
5. $\lvert i\, z_2 \rvert$	**ε.** –2
	στ. 5
	ζ. 10

Μονάδες 7,5

Β.2. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $\lvert z \rvert = 1$, να δείξετε ότι $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \le 3 \\ \dfrac{1 - e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$$

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι α = –1/9.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο Α(4, f(4)).

Μονάδες 7

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1 και x=2.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$$f^3(x) + \beta\, f^2(x) + \gamma\, f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 8

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο ανοικτό διάστημα (0,1).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i) $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t\, f^2(xt)\, dt$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x) = -2xf^2(x)$

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

Μονάδες 4

γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Μονάδες 4

δ. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \to +\infty}$ (x f(x) ημ2x).

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο, μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να δείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

Μονάδες 12

Β.1. Έστω η συνάρτηση f(x) = ημx. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f'(x) = \sigma\upsilon\nu x .$$

Μονάδες 8

Β.2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α,β] και συνεχής στο (α,β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α,β] μία μέγιστη τιμή.

Μονάδα 1

β. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδα 1

γ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$, τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$

Μονάδα 1

δ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx.$$

Μονάδα 1

ε. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

Μονάδα 1

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(\nu) = i^{\nu} z$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

α. Να δείξετε ότι $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$.

Μονάδες 7

β. Αν $|z| = \varrho$ και $Arg(z) = \theta$, να δείξετε ότι

$$f(13) = \varrho\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right].$$

Μονάδες 8

γ. Αν $|z| = 2$ και $Arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0, z και f(13).

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1-1.

α. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση:
$g\big(f(x) + x^3 - x\big) = g\big(f(x) + 2x - 1\big)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

Μονάδες 18

ΘΕΜΑ 4ο

α. Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο [α, β].
Να αποδείξετε ότι αν $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε και $\int_\alpha^\beta h(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$.

Μονάδες 2

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις σχέσεις:
$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad$ και $\quad f(0) = 0$.

ι) Να εκφραστεί η f΄ ως συνάρτηση της f.

Μονάδες 5

ιι) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x)$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 12

ιιι) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x = 0, x = 1 και τον άξονα x΄x, να δείξετε ότι

$$\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1) \quad .$$

Μονάδες 6

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΕΜΠΤΗ 29 ΜΑΪΟΥ 2003 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ’ ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8

Β. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 7

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z|=|\bar{z}|=|-z|$.

Μονάδες 2

β. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

Μονάδες 2

γ. Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει

$$\int f'(x)dx = f(x) + c \ , \ c \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

Μονάδες 2

ε. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0)=0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $w=3z-i\bar{z}+4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z.

α. Να αποδείξετε ότι $\text{Re}(w)=3\alpha-\beta+4$

$$\text{Im}(w)=3\beta-\alpha.$$

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$, έχει το ελάχιστο μέτρο.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5+x^3+x$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x)\geq f(1+x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0,0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}.

Μονάδες 5

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x=3$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α,β). Αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma\in(\alpha,\beta)$, $\delta\in(\alpha,\beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma)\cdot f(\delta)<0$, να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα (α,β).

Μονάδες 8

β. Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1)<0$ και $f''(\xi_2)>0$.

Μονάδες 9

γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ *(για τους εξεταζόμενους)*

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μετά την 10.30΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α. όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

β. κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} \ .$$

Μονάδες 10

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα $\big|\,|z_1| - |z_2|\,\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

Μονάδες 2

β. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

Μονάδες 2

γ. Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση $1-1$, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 = x_2, \text{ τότε } f(x_1) = f(x_2) .$$

Μονάδες 2

δ. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx \; .$$

Μονάδες 2

Γ. Πότε μία ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 2ο

α. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$|z| = 2$ και $\text{Im}(z) \geq 0$.

Μονάδες 12

β. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{4}{z}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

α. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, όταν το x τείνει στο $-\infty$.

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι $f\,'(x) \cdot \sqrt{x^2+1} + f(x) = 0$.

Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) = -f(2-x) \text{ και } f\,'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

Μονάδες 8

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f\,'(x)}$.

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x΄x, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^o .

Μονάδες 9

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 27 ΜΑΪΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$

Μονάδες 10

Β. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

Μονάδες 2

β. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$

Μονάδες 2

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\ g'(x_0)$$

Μονάδες 2

δ. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 2

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2 \ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

Μονάδες 10

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(0)=f(\frac{3}{2})=0$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi \in (0, \frac{3}{2})$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-f(\xi)$.

Μονάδες 8

β. Εάν $f(x)=2x^2-3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I(\alpha)=\int_{\alpha}^{0} g(x)dx\,,\quad \alpha\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} I(\alpha)$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1)=1$. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει

$$g(x)=\int_{1}^{x^3}|z|f(t)dt-3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)\geq 0,$$

όπου $z=\alpha+\beta i\in C$, με $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}^*$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τη g'.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι $|z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$

Μονάδες 8

γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος **β** να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(z^2)=-\frac{1}{2}$

Μονάδες 6

δ. Αν επιπλέον $f(2)=\alpha>0$, $f(3)=\beta$ και $\alpha>\beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Μονάδες 6

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 9

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

β. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

Μονάδες 2

γ. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

Μονάδες 2

δ. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

Μονάδες 2

ε. Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε

$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0, με $k \in \mathbb{N}$ και $k \geq 2$.

Μονάδες 2

Γ. Να ορίσετε πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α, β].

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$, όπου $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

α. Να βρείτε τον m ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 13

β. Αν m = 10, να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 0 και x = 1.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα [α, β] με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και μιγαδικός αριθμός z με $Re(z) \neq 0$, $Im(z) \neq 0$ και $|Re(z)| > |Im(z)|$.

Αν $z+\frac{1}{z}=f(\alpha)$ και $z^2+\frac{1}{z^2}=f^2(\beta)$, να αποδείξετε ότι:

α. $|z|=1$

Μονάδες 11

β. $f^2(\beta)<f^2(\alpha)$

Μονάδες 5

γ. η εξίσωση $x^3 f(\alpha)+f(\beta)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1,\ 1)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,\ +\infty)\to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(x)=\frac{x^2}{2}+\int_0^{\frac{1}{2}}2xf(2xt)\,dt\ .$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x-(x+1)$.

Μονάδες 7

γ. Να αποδείξετε ότι η f(x) έχει μοναδική ρίζα στο $[0,\ +\infty)$.

Μονάδες 5

δ. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

Μονάδες 6

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

δείξτε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \boldsymbol{\eta} .$$

Μονάδες 9

Α.2 Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$.

Μονάδες 2

β. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big)$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Μονάδες 2

γ. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία y = x, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

Μονάδες 2

δ. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty .$$

Μονάδες 2

ε. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε ισχύει $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x) - f(\alpha)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Μονάδες 2

στ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

α. Δείξτε ότι: $\overline{z_1} = \dfrac{9}{z_1}$.

Μονάδες 7

β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός .

Μονάδες 9

γ. Δείξτε ότι: $|z_1 + z_2 + z_3| = \dfrac{1}{3}\,|z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$.

α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 3

β. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y = \lambda e x$.

Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ.

Μονάδες 7

γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο Μ και του άξονα y΄y, είναι $E(\lambda) = \dfrac{e-2}{2\lambda}$.

Μονάδες 8

δ. Υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση $2 f'(x) = e^{x - f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

α. Να δειχθεί ότι: $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$.

Μονάδες 6

β. Να βρεθεί το: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x f(x-t)\,dt}{\eta\mu x}$.

Μονάδες 6

γ. Δίδονται οι συναρτήσεις:

$$h(x) = \int_{-x}^{x} t^{2005} \cdot f(t)dt \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^{2007}}{2007}.$$

Δείξτε ότι $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

δ. Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005} \cdot f(t)dt = \frac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0\ ,\ 1)$.

Μονάδες 6

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **<u>Να μην αντιγράψετε</u>** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **<u>Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.</u>** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **<u>στο τετράδιό σας σε όλα</u>** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη **10:30΄** πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 6 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Μονάδες 9

Α.2 Πότε μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται “1-1”;

Μονάδες 4

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

Μονάδες 2

β. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o. Αν η f είναι κυρτή στο $(α,x_o)$ και κοίλη στο $(x_o,β)$ ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_o,f(x_o))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 2

γ. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

Μονάδες 2

δ. Αν για δύο συναρτήσεις f,g ορίζονται οι fog και gof, τότε είναι υποχρεωτικά fog ≠ gof.

Μονάδες 2

ε. Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών $z, \bar{z}$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x.

Μονάδες 2

στ. Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και $\lambda \in \mathbb{R}^*$, τότε ισχύει:

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \; .$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$z_1+z_2=4+4i$ και $2z_1 - \bar{z}_2 = 5+5i$,

να βρείτε τους z_1, z_2.

Μονάδες 10

β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z,w ισχύουν $|z-1-3i| \leq \sqrt{2}$ και $|w-3-i| \leq \sqrt{2}$:

i. να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε z=w και

Μονάδες 10

ii. να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z-w|$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι “1-1”.

Μονάδες 7

β. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία Α(1,2005) και Β(-2,1),

να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(-2004+f(x^2-8)\right)=-2$.

Μονάδες 9

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $y=-\frac{1}{668}x+2005$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=2005.$$

α. Να δείξετε ότι:

i. $f(0)=0$

Μονάδες 4

ii. $f'(0)=1$.

Μονάδες 4

β. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + \lambda(f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3$.

Μονάδες 7

γ. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

να δείξετε ότι:

i. $xf(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Μονάδες 6

ii. $\int_0^1 f(x)dx < f(1)$.

Μονάδες 4

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **<u>Να μην αντιγράψετε</u>** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **<u>Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.</u>** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **<u>στο τετράδιό σας σε όλα</u>** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη **10.30΄** πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 27 ΜΑΪΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1^o

Α.1 Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

Να αποδείξετε ότι:

- Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
- Αν $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 10

Α.2 Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ;

Μονάδες 5

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = z^2$.

Μονάδες 2

β. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

Μονάδες 2

γ. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 2

δ. Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

ε. Ισχύει η σχέση

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx,$$ όπου f', g'

είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β].

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 + (x-2)^2$ με $x \geq 2$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 8

γ. **i.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία y=x.

Μονάδες 4

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

Μονάδες 9

ii. $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $\mathrm{Re}\,(z_1 \bar{z}_2) \geq -1$.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

γ. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\ln x$ στο σημείο $Α(α, \ln α)$ με $α>0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=e^x$ στο σημείο $Β(β, e^β)$ με $β \in \mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Μονάδες 9

δ. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

Μονάδες 3

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Να αποδείξετε ότι: $(\text{συν}x)' = -\text{ημ}x,\ x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

Α.2 Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 5

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2|.$$

Μονάδες 2

β. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o και $g(x_o) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = \frac{f(x_o)\,g'(x_o) - f'(x_o)\,g(x_o)}{[g(x_o)]^2}\ .$$

Μονάδες 2

γ. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $[\ell n|x|]' = \frac{1}{x}$.

Μονάδες 2

δ. Μια συνάρτηση $f:A \to \mathbb{R}$ είναι 1–1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .

Μονάδες 2

ε. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α,β], τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1+e^{x+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 9

β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \dfrac{1}{f(x)}dx$.

Μονάδες 9

γ. Για κάθε x<0 να αποδείξετε ότι:

$$f(5^x)+f(7^x)<f(6^x)+f(8^x) .$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, που ικανοποιούν την ισότητα $(4-z)^{10} = z^{10}$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2+x+\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία x=2.

Μονάδες 7

β. Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία x=2 τέμνει τον άξονα y΄y στο $y_o=-3$, τότε

i. να βρείτε το α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε).

Μονάδες 9

ii. να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, της εφαπτομένης (ε), του άξονα x΄x και της ευθείας $x=\frac{3}{5}$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ell n(x+1)-(x+1)\ell nx$ με $x>0$.

α. i. Να αποδείξετε ότι: $\ell n(x+1)-\ell nx<\frac{1}{x}$, $x>0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Μονάδες 12

β. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ell n(1+\frac{1}{x})$.

Μονάδες 5

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\alpha\in(0,+\infty)$ τέτοιος ώστε $(\alpha+1)^{\alpha} = \alpha^{\alpha+1}$.

Μονάδες 8

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Αν z_1 , z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Μονάδες 8

Α.2 Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α.3 Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α,β] και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx > 0$.

Μονάδες 2

β. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

Μονάδες 2

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

Μονάδες 2

δ. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε

$$\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)\,dt\right)' = f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

Μονάδες 2

ε. Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = 0$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^{o}

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός

$$z = \frac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i} \qquad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Μονάδες 9

β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο

$$z = \frac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i}$$

για $\alpha = 0$ και $\alpha = 2$ αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2.

Μονάδες 8

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^{\nu}$$

για κάθε φυσικό αριθμό ν.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$$

όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

α. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 7

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 8

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f, να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 3

δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει $f(0) > 0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,g(t)\,dt\,, \qquad x \in [0,\ 1],$$

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,dt\,, \qquad x \in [0,\ 1].$$

α. Να δειχθεί ότι $F(x) > 0$ για κάθε x στο διάστημα (0, 1].

Μονάδες 8

β. Να αποδειχθεί ότι:

$$f(x)\cdot G(x) > F(x)$$

για κάθε x στο διάστημα (0, 1].

Μονάδες 6

γ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$$

για κάθε x στο διάστημα (0, 1].

Μονάδες 4

δ. Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\int_0^x \ f(t)\,g(t)\,dt\right)\cdot\left(\int_0^{x^2} \text{ημ}t^2\,dt\right)}{\left(\int_0^x \ g(t)\,dt\right)\cdot x^5}\ .$$

Μονάδες 7

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

Α.2 Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 5

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 2

β. Αν f, g, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α,β], τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g'(x)dx.$$

Μονάδες 2

γ. Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε

$$\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β) όπου $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

Μονάδες 2

ε. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x\in\Delta$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu 3x}{x}, & x<0 \\ x^2+\alpha x+\beta\sigma\upsilon\nu x, & x\geq 0. \end{cases}$$

α. Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=3$.

Μονάδες 8

β. Αν $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$, να αποδειχθεί ότι $\alpha = \beta = 3$.

Μονάδες 9

γ. Αν $\alpha = \beta = 3$, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x)dx$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^x - e\ln x, \quad x > 0.$$

α. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Μονάδες 10

β. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $f(x) \geq e$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

γ. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση

$$\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t)dt = \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(t)dt + \int_2^4 f(t)dt$$

έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha+\beta i$ και $z_2 = \dfrac{2-\bar{z}_1}{2+\bar{z}_1}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq 0$. Δίνεται επίσης ότι $z_2 - z_1 \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι $z_2 - z_1 = 1$.

Μονάδες 9

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 6

γ. Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και $\alpha\beta>0$, να υπολογισθεί ο z_1 και να δειχθεί ότι

$$(z_1+1+i)^{20} - (\bar{z}_1+1-i)^{20} = 0.$$

Μονάδες 10

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΜΑΪΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$$

Μονάδες 10

Α.2 Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

Μονάδες 5

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι 1−1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:
$f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A)$

Μονάδες 2

β. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 2

γ. Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών.

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει

$$f''(x) > 0$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Μονάδες 2

ε. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$ τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

$$\left|(i+2\sqrt{2})z\right| = 6 \quad \text{και} \quad \left|w-(1-i)\right| = \left|w-(3-3i)\right|$$

τότε να βρείτε:

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z .

Μονάδες 6

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w .

Μονάδες 7

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$

Μονάδες 6

δ. την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x\ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

Μονάδες 3

β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x) \quad ,$$

για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)dt - 45$$

α. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = 20x^3 + 6x - 45$$

Μονάδες 8

β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

$$g''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$$

Μονάδες 4

γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$$

και $g(0)=g'(0)=1$, τότε

i. να αποδείξετε ότι $g(x)=x^5+x^3+x+1$

Μονάδες 10

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1−1

Μονάδες 3

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.

4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Μονάδες 10

Β. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 5

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

Μονάδες 2

β. Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Μονάδες 2

γ. Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

Μονάδες 2

δ. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε:

$$\alpha+\beta i=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ ή } \beta=0$$

Μονάδες 2

ε. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_o)\cup(x_o, \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o} (f(x)-\ell)=0$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2+\beta z+\gamma=0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι $\beta=-1$ και $\gamma=1$.

Μονάδες 9

β. Να αποδείξετε ότι $z_1^3=-1$.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο ισχύει:

$$|w|=|z_1-\overline{z_1}|$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\ln x, \quad x > 0.$

α. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

γ. Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{f(x)} & , \quad x > 0 \\ k & , \quad x = 0 \end{cases}$$

i. Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής.

Μονάδες 6

ii. Αν $k = -\dfrac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (0, e).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,, \qquad x \in [0, +\infty),$$

$$h(x) = \frac{F(x)}{\int_0^x t\,f(t)\,dt}, \qquad x \in (0, +\infty).$$

α. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^{t-1}[f(t)+F(t)]dt = F(1)$

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0, +∞).

Μονάδες 8

γ. Αν h(1)=2, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(t)\,dt < 2\int_0^2 tf(t)dt$

Μονάδες 6

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(t)\,dt = \frac{1}{2}F(1)$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.00΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x)=0$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 10

Β. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Μονάδες 2

β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

Μονάδες 2

γ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$

Μονάδες 2

δ. Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

ε. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] και ισχύει $f(x)<0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x=α, x=β και τον άξονα $x'x$ είναι

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z=(2\lambda+1)+(2\lambda-1)i\ ,\qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

Α.α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$

Μονάδες 9

β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0=1-i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

Μονάδες 8

Β. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση

$$|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_0$$

όπου z_0 ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha^x - \ln(x+1), \qquad x > -1,$$

όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$

Α. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι α=e

Μονάδες 8

Β. Για α=e,

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Μονάδες 5

β. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

Μονάδες 6

γ. αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1, 2)

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [0, 2] για την οποία ισχύει

$$\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$H(x) = \int_0^x t\,f(t)dt, \qquad x \in [0,\ 2],$$

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{H(x)}{x} - \displaystyle\int_0^x f(t)dt + 3, & x \in (0,\ 2] \\ 6 \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x = 0 \end{cases}$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα [0, 2].

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (0, 2) και ότι ισχύει

$$G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}, \qquad 0 < x < 2$$

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\alpha \in (0,\ 2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $H(\alpha)=0$.

Μονάδες 7

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in (0,\ \alpha)$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\alpha \int_0^{\xi} t\,f(t)dt = \xi^2 \int_0^{\alpha} f(t)dt$$

Μονάδες 7

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΛΙΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0\,,+\infty)$ και ισχύει:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Μονάδες 9

Β. Έστω μια συνάρτηση f και x_o ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_o;

Μονάδες 6

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν z είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει $\overline{(z^{\nu})}=\left(\overline{z}\right)^{\nu}$

Μονάδες 2

β. Η συνάρτηση f είναι 1−1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

Μονάδες 2

γ. Αν $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_o τότε

$$\lim_{x \to x_o} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

Μονάδες 2

δ. Έστω η συνάρτηση $f(x) =$ εφx. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{\, x \mid \text{συν}x = 0 \,\}$ και ισχύει

$$f'(x) = -\frac{1}{\text{συν}^2 x}$$

Μονάδες 2

ε. Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει

$$\int f'(x)dx = f(x) + c, \quad x \in \Delta$$

όπου c είναι μια πραγματική σταθερά.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(2-i)\,z + (2+i)\,\bar{z} - 8 = 0$$

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z = x+yi$ οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό z_1 και τον μοναδικό φανταστικό αριθμό z_2 οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 8

γ. Για τους αριθμούς z_1, z_2 που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=40$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln[(\lambda+1)x^2+x+1] - \ln(x+2), \quad x > -1$$

όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \geq -1$

Α. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ, ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 5

Β. Έστω ότι $\lambda = -1$

α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \alpha^2 = 0$ έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό α με $\alpha \neq 0$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται μια συνάρτηση $f:[0,2]\to \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες

$$f''(x)-4f'(x)+4f(x)=k\,x\,e^{2x},\ \ 0\le x\le 2$$

$$f'(0)=2f(0),\ \ f'(2)=2f(2)+12e^4,\ \ f(1)=e^2$$

όπου k ένας πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x)=3x^2-\frac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}},\ \ 0\le x\le 2$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0,2]$.

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f''(\xi)+4f(\xi)=6\,\xi\,e^{2\xi}+4f'(\xi)$$

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι $k=6$ και ότι ισχύει $g(x)=0$ για κάθε $x\in[0,2]$.

Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3e^{2x},\ \ 0\le x\le 2$

Μονάδες 5

ε. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx$$

Μονάδες 4

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

  $$G(x)=F(x)+c, \quad c\in\mathbb{R}$$

  είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

  $$G(x)=F(x)+c, \quad c\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 6

Α2. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών α+βi και γ+δi είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

β) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β),

όπου $A = \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B = \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$

δ) $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z+\dfrac{2}{z}=2$ όπου $z\in C$ με $z\neq 0$

Β1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης.

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι

$$z_1^{2010}+z_2^{2010}=0$$

Μονάδες 6

Β3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει

$$|w-4+3i| = |z_1 - z_2|$$

τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 7

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **Β3**, να αποδείξετε ότι $3\le |w| \le 7$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$$

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα ψ΄ψ.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_{-1}^{1}xf(x)dx$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x)\neq x$$

$$f(x)-x=3+\int_{0}^{x}\frac{t}{f(t)-t}dt$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x)=\frac{f(x)}{f(x)-x}\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\left(f(x)\right)^2-2xf(x)$, $x\in\mathbb{R}$, είναι σταθερή.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+9}\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{x}^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt\ ,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης**.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = ημx$, $x \in \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $(ημx)' = συνx$

Μονάδες 8

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 3

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $f(x) = α^x$, $α > 0$, τότε ισχύει $\left(α^x\right)' = xα^{x-1}$

β) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε πάντοτε ισχύει $f \circ g = g \circ f$

γ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$

ε) Για κάθε $z \in C$ ισχύει $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν

$$z_1 + z_2 = -2 \text{ και } z_1 \cdot z_2 = 5$$

Β1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2

Μονάδες 5

Β2. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η σχέση

$$|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$$

να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $(x+1)^2 + y^2 = 4$

Μονάδες 8

Β3. Από τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **Β2** να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει

$$2 \cdot \text{Re}(w) + \text{Im}(w) = 0$$

Μονάδες 6

Β4. Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς w του ερωτήματος **Β2** με την ιδιότητα $|w_1 - w_2| = 4$, να αποδείξετε ότι $|w_1 + w_2| = 2$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x + x - 3$, $x > 0$

Γ1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

Γ4. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος **Γ3** με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιος, ώστε $\xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0$

και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\int_0^1 f(xt)dt + x^3}{\eta\mu^3 x} = +\infty$

Μονάδες 6

Αν επιπλέον δίνεται ότι

$$f'(x) + 2x = 2x\cdot\left(f(x)+x^2\right),\ x\in\mathbb{R},\ \text{τότε:}$$

Δ3. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = e^{x^2} - x^2,\quad x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 8

Δ4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$h(x) = \int_x^{x+2} f(t)dt\ ,\ x \geq 0$$

και να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την ανίσωση

$$\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt + \int_6^4 f(t)dt < 0$$

Μονάδες 7

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ
(ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$

Μονάδες 10

Α2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0=1$

β) Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1=\mathbb{R}-\{x \mid \text{συν}x=0\}$ ισχύει: $(\text{εφ}x)' = -\dfrac{1}{\text{συν}^2 x}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{ημ}\,x}{x} = 1$

ε) Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-3i| + |\bar{z}+3i| = 2 \quad \text{και} \quad w = z-3i+\frac{1}{z-3i}$$

Β1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι $\bar{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i}$

Μονάδες 4

Β3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$

Μονάδες 8

Β4. Να αποδείξετε ότι: $|z-w| = |z|$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0)=f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln(e^x - x),\ x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 8

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 3

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \text{συν}x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

i) $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$

ii) $$\frac{1 - f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)}\,dt$$

iii) $$\frac{1 - g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)}\,dt$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 4

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\ln f(x)}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$F(x) = \int_1^x f(t^2)dt$$

τους άξονες x΄x και y΄y και την ευθεία με εξίσωση x=1.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

Μονάδες 10

Α2. Έστω μία συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Να διατυπώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης ή παράγουσας της f στο Δ.

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$z-\bar{z}=2\beta$$

β) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x)\leq f(x_0)$ για κάθε $x\in A$

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$$

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις:

$$|z-i|=1+\operatorname{Im}(z) \qquad (1)$$

$$w(\overline{w}+3i)=i(3\overline{w}+i) \qquad (2)$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y=\frac{1}{4}x^2$

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(0,3) και ακτίνα $\rho=2\sqrt{2}$.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε τα σημεία Α και Β του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με z =w.

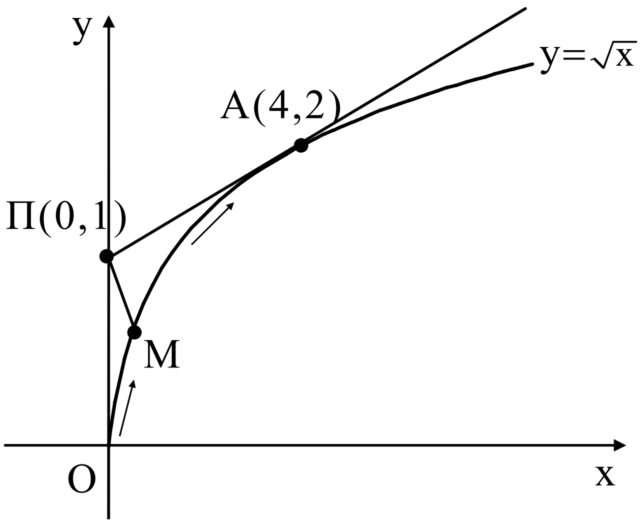
Μονάδες 5

Β4. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ, έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Κ,Α,Λ,Β να είναι τετράγωνο.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=\sqrt{x}$, $x\geq 0$. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση Π(0,1) ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή Ο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t, $t\geq 0$ είναι $x'(t)=16\text{m/min}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t, $t\geq 0$ δίνεται από τον τύπο:

$$x(t)=16t$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το Α(4,2) και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το σημείο Ο μέχρι το σημείο Α.

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (0, \frac{1}{4})$, κατά την οποία η απόσταση d=(ΠΜ) του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη.

Μονάδες 8

Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1 + f(0)$

ii) $f'(0) < f(1) - f(0)$ και

iii) $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Αν επιπλέον $g(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

Δ3. Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x g(x)}$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx > 2$

Μονάδες 5

Δ5. Αν το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και x=1 είναι $E(\Omega)=e-\frac{5}{2}$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 f(x)dx$$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_0^{\xi} f(t)dt = 2$$

Μονάδες 6

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **<u>Να μην αντιγράψετε</u>** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **<u>Δεν επιτρέπεται να γράψετε</u>** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **<u>στο τετράδιό σας</u>** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.00

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑΤΑ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ Ο.Ε.Φ.Ε.

ΑΠΟ 2003 ΕΩΣ 2011

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέμα 1ο

Α. α) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $f'(x)=-\eta\mu x$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

β) Έστω οι συναρτήσεις f,g συνεχείς σε ένα διάστημα Δ για τις οποίες ισχύει: $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε να ισχύει: $f(x)=g(x)+c$ για κάθε $x\in\Delta$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

γ) Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Να δώσετε τον ορισμό : Πότε η f παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό ελάχιστο. **ΜΟΝΑΔΕΣ 3**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος**.

α) Αν μια συνάρτηση $f:A\to R$ έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Α.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0)>0$, τότε $f(x)>0$ για τις τιμές του x κοντά στο x_0.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$ τότε, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f'(x_0)>0$.

δ) Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι κυρτή στο διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη σε αυτό. Τότε ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

ε) Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq 0$ και ισχύει $\int_a^\beta f(x)dx>0$, τότε υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιος ώστε $f(x_0)>0$.

στ) Αν η συνεχής συνάρτηση f δεν είναι παντού ίση με μηδέν στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $\int_a^\beta f(x)dx=0$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές.

ΜΟΝΑΔΕΣ 9

Θέμα 2ο

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln(ax)}{\sqrt{x}}, a>0$.

Α. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\mathrm{M}(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $x-y=0$, να βρείτε την τιμή του α.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Β. Για $a=1$:

α) Να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα της f.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών και τις ασύμπτωτες .

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

γ) Να αποδείξετε: ότι $\left(\sqrt{\kappa}\right)^{\sqrt{\kappa+1}} > \left(\sqrt{\kappa+1}\right)^{\sqrt{\kappa}}$ για κάθε θετικό ακέραιο $\kappa \geq 8$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Θέμα 3ο

Δίνονται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $0<\alpha<\beta$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z=a+\beta i$ και $w=f(\alpha)+i\cdot f(\beta)$ με $f(\beta)\neq 0$.

Α. Να αποδείξετε ότι:

α) Ο αριθμός $z_1=\dfrac{1+\beta-i\cdot\bar{z}}{1+f(\beta)-i\cdot\bar{w}}$ είναι πραγματικός αν και μόνο αν $f(a)=a$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β) Αν $z=-iw$ τότε οι εικόνες των z,w στο μιγαδικό επίπεδο και η αρχή 0 των αξόνων, είναι κορυφές ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Β. Έστω ότι ισχύει $|z-iw|^2=|z|^2+|iw|^2$. Να αποδείξετε ότι:

α) $a\cdot f(\beta)-\beta\cdot f(\alpha)=0$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

β) Οι εικόνες των z,w και η αρχή 0 είναι συνευθειακά σημεία.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

γ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(a,\beta)$ τέτοιο ώστε, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο 0(0,0).

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f''(x)$ συνεχή στο **R** τέτοια ώστε να ισχύουν:

$$\int_0^x \left(t^2+1\right)\cdot f''(t)\,dt = 2\int_x^0 t\cdot f'(t)\,dt - 4\int_0^1 x\cdot t\cdot f(x)\,dt \text{ για κάθε } x\in R \text{, με}$$

$$f(0)=0 \text{ και } f'(0)=2 .$$

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της είναι $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}, x\in R$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

β) Έστω $E(a)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=0$ και $x=a>0$.

Αν το a μεταβάλλεται με ρυθμό $\dfrac{10}{3}cm/\sec$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(a)$, τη χρονική στιγμή κατά την οποία $a=3cm$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

γ) Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση g για την οποία ισχύει:

$$\left|g(x)+x-2\right|\le\left|f(x)\right| \text{ για κάθε } x\in R .$$

(i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=-x+2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g όταν $x\to+\infty$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

(ii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, την πλάγια ασύμπτωτη της στο $+\infty$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$, να αποδείξετε ότι: $E\le\ln 5$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΤΙΣ ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2004

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε το θεώρημα:

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν

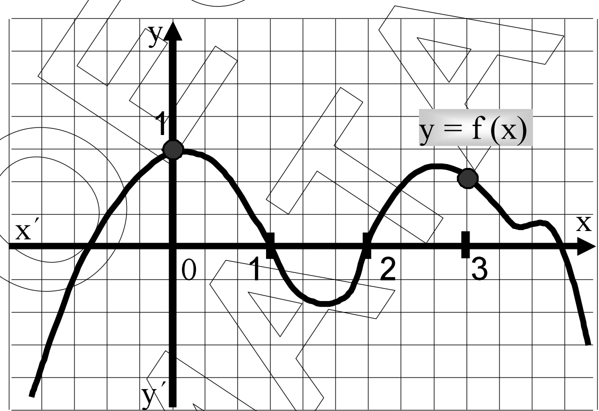
- η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε

$$\mathbf{f(x_0) = \eta}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Β. Η συνάρτηση f, που η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με συνεχή δεύτερη παράγωγο.



Να βρείτε, αν η τιμή των ολοκληρωμάτων I_1 , I_2 , I_3 είναι θετική ή αρνητική.

$I_1 = \int_0^3 f(x)\,dx$ ΜΟΝΑΔΕΣ 2

$I_2 = \int_0^3 f'(x)\,dx$ ΜΟΝΑΔΕΣ 2

$I_3 = \int_0^3 f''(x)\,dx$ ΜΟΝΑΔΕΣ 3

Γ. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα όρια της στήλης Α με την τιμή του της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α	**ΣΤΗΛΗ Β**
1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x}$	**α.** $-\infty$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(x\,\eta\mu\dfrac{1}{x} \right)$	**β.** 0
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x$	**γ.** 1
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{e^x}$	**δ.** $+\infty$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Δ. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Να αποδείξετε, ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$. ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΘΕΜΑ 2ο.

Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) - g'(x) = 1, \quad f'(x) \neq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν στο όριο $L = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{g(x)+2}{f(x)-x-2}$ εφαρμόσουμε τον κανόνα του ορίου πηλίκου, παρουσιάζεται απροσδιοριστία της μορφής $\dfrac{0}{0}$.

α. i) Να υπολογίσετε το όριο L. ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στο $+\infty$. ΜΟΝΑΔΕΣ 6

β. Να αποδείξετε ότι η g έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$. ΜΟΝΑΔΕΣ 6

γ. Να αποδείξετε ότι: $f(x) - g(x) = x+4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ 3ο

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε την συνάρτηση $g(x) = \int_0^x \frac{2}{\alpha + e^t} dt$, $\alpha > 0$ και τον μιγαδικό $z = g(x) + xi$ με $|\bar{z} + i| \leq |z - 1|$.

A. Να αποδείξετε, ότι i) η g αντιστρέφεται και ii) οι εικόνες του z ανήκουν στην γραφική παράσταση της g^{-1}. ΜΟΝΑΔΕΣ 4

B. Να αποδείξετε, ότι:

α. $Re(z) \leq Im(z)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ΜΟΝΑΔΕΣ 7

β. $\alpha = 1$. ΜΟΝΑΔΕΣ 7

γ. $\frac{1}{1+e^2} < \int_0^2 \frac{1}{\alpha + e^t} dt - \int_0^1 \frac{1}{\alpha + e^t} dt < \frac{1}{1+e}$ ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ 4ο

Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $g(0) = 1$ και

$$f'(x) = g^2(x) \neq 0, \quad f^2(x) + g^2(x) = 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι:

i) $g'(x) = -g(x) \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ii) Η g είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[0, +\infty)$ και έχει ακρότατο το 1 . ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β. i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της. ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ii) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της O(0, 0). ΜΟΝΑΔΕΣ 3

γ. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου, που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y = x$, $x = 1$, να δείξετε, ότι $E = \frac{1}{2} + \ln[g(1)]$. ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

Να αποδείξετε ότι:

Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 9

Β. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^a$ με $a \in \mathbb{R}$ και $x > 0$.

Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$.

Μονάδες 6

Γ. Να απαντήσετε αν είναι **Σωστή** ή **Λάθος** κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

1. Μια συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ είναι << 1 – 1 >> αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in \mathrm{A}$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$

2. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ τότε $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0.

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, τότε $f(a) \cdot f(\beta) < 0$.

4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ και γνησίως αύξουσα, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) < 0$.

5. Αν $\int_a^\beta f(x)dx = 0$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού ίση με μηδέν στο $[a, \beta]$, τότε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x} \cdot (\ln x - 2), x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$.

Μονάδες 4

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$.

Μονάδες 3

γ) Να μελετήσετε τα κοίλα της f και να βρείτε το σημείο της καμπής της.

Μονάδες 8

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=\frac{1}{e}$ και $x=e^2$.

Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Δίνεται ο μιγαδικός $z=e^x+(x-1)i,\quad x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\operatorname{Re}(z)>\operatorname{Im}(z)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$..

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιος ώστε ο αριθμός $w=z^2+z+2i$ να είναι πραγματικός.

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε το μιγαδικό z του οποίου το μέτρο να γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες 9

Θέμα 4ο

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0)=\frac{1}{2}$ και $e^x\left[f(x)+f'(x)\right]+\eta\mu x=-f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x},\ x\in\mathbb{R}$ και ότι ισχύει $f(x)+f(-x)=\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$..

Μονάδες 7

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

Μονάδες 6

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f(x)dx$.

Μονάδες 6

δ) Να αποδείξετε ότι: $0\le\int_0^{\pi/2}f(x)dx\le\frac{\pi}{4}$.

Μονάδες 6

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέμα 1

Α. α) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 11

β) Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Μονάδες 4

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος.**

α) Μια συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ είναι <<1 – 1>> όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \mathrm{A}$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $x_1=x_2$.

β) Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$ τότε $f(x)\neq 0$ για τις τιμές του x κοντά στο x_0.

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και δεν παρουσιάζει καμπή σε κανένα σημείο του Δ, τότε $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$.

ε) Αν $\int_a^\beta f(x)dx=0$ και $a<\beta$ τότε κατ' ανάγκη ισχύει $f(x)=0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$.

Μονάδες 10

Θέμα 2

Δίνονται οι μιγαδικοί z και $w=\dfrac{z+i}{1+i\,z}$ όπου $z\neq i$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\left|\dfrac{w-i}{w+i}\right|=|z|$

Μονάδες 5

β) Αν $|z|=1$ και Μ η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ανήκει στον άξονα x΄x.

Μονάδες 6

γ) Να αποδείξετε την ισοδυναμία: w φανταστικός $\Leftrightarrow$ z φανταστικός.

Μονάδες 7

δ) Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο $[a,\beta]$ με $f(a)>1$ και έστω $z=f(a)\cdot i$ και $w=f(\beta)\cdot i$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α,β).

Μονάδες 7

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-ax-1$ όπου $a>1$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0,f(0))$.

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο το οποίο είναι αρνητικό.

Μονάδες 8

γ) Έστω $\mathrm{E}(a)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της στο $(0,f(0))$ και την ευθεία $x=a>1$.

i) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{E}(a)=e^a-\dfrac{a^2}{2}-a-1$.

Μονάδες 7

ii) Να βρείτε το $\lim\limits_{a\to+\infty}\mathrm{E}(a)$.

Μονάδες 6

Θέμα 4

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x)>0$ και έστω

$$g(x)=\int_0^1 t\cdot f(xt)\,dt, \quad t,x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $g(x)=\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x t\cdot f(t)\,dt$ για κάθε $x\neq 0$.

Μονάδες 6

β) Η g είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Μονάδες 6

γ) $x\cdot g(x)<\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ για κάθε $x>0$.

Μονάδες 7

δ) Αν $\displaystyle\int_1^2 t\cdot f(t)\,dt=3\int_0^1 t\cdot f(t)\,dt$ τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιος ώστε: $2g(\xi)=f(\xi)$.

Μονάδες 6

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Θέμα 1ο

Α. α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

β) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Μονάδες 9

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη Σωστό ή Λάθος.

1. Αν για μια συνάρτηση $f : A \to \Re$ ισχύει $f(x) \le \kappa$ όπου $\kappa \in \Re$ για κάθε $x \in A$, τότε το κ είναι η μέγιστη τιμή της f.

2. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$, τότε υπάρχει το όριο της $f(x)$ στο x_0 και είναι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

3. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ και $f(x) \ne 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο $[a, \beta]$.

4. Αν για δύο συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα Δ ισχύει $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

5. Αν για μια συνάρτηση f υπάρχει παράγουσα στο διάστημα Δ, τότε για κάθε $\lambda \in \Re$ ισχύει: $\int \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$.

6. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$ και ισχύει $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε $\int_a^\beta f(x)dx < \int_a^\beta g(x)dx$.

Μονάδες 12

Θέμα 2ο

Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x^2+a)\cdot e^{-x}$, $x\in\Re$. Αν η ευθεία $y=-2x+2$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $\mathrm{M}\big(0,f(0)\big)$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $a=2$.

Μονάδες 7

β) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f.

Μονάδες 6

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Μονάδες 6

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2007$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\Re$.

Μονάδες 6

Θέμα 3ο

Δίνονται οι μιγαδικοί z,w με $z\cdot w\neq 0$ για τους οποίους ισχύει:

$$|z+w|=|z-w|.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)=0$.

Μονάδες 6

β) Ο αριθμός $\dfrac{z}{w}$ είναι φανταστικός.

Μονάδες 5

γ) Το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z,w στο μιγαδικό επίπεδο και την αρχή Ο των αξόνων, είναι ορθογώνιο στο 0.

Μονάδες 7

δ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[a,\beta]$ με $0<a<\beta$ και $z=a+i\cdot f(a)$, $w=f(\beta)-\beta i$ τότε η εξίσωση $x\cdot f'(x)=f(x)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (a,β).

Μονάδες 7

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ όπου $t,x\in\Re$.

α) Να μελετήσετε ως προς τα κοίλα τη συνάρτηση g.

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{x}{1+x^2}\le g(x)\le x$ για κάθε $x\ge 0$

Μονάδες 7

γ) Να αποδείξετε ότι: $g(x)+g(-x)=0$ για κάθε $x\in\Re$.

Μονάδες 6

δ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ είναι $\mathrm{E} = g(1) - \frac{1}{2}\ln 2$ τ.μ.

Μονάδες 8

Καλή Επιτυχία στις Γενικές εξετάσεις

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **α.** Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ,

να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f'(x) = \nu x^{\nu-1}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Β. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ):

α. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των z_1 και z_2 είναι το άθροισμα των διανυσματικών τους ακτίνων.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

β. Είναι: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

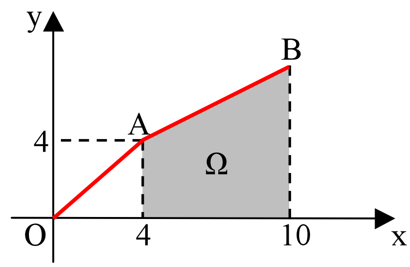
γ. Είναι: $|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

δ. Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ με $z_1 \ne z_2$ παριστάνει τη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

Γ. Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος που η γραφική της παράσταση αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΑ και ΑΒ. Το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου Ω είναι Ε(Ω) = 36 τ.μ. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:



α. F(0) = **β.** F(4) = **γ.** F(10) =

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + \lambda, & \text{αν } x > 0 \\ (\mu - 1)x + 1, & \text{αν } x \le 0 \end{cases}$ με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η f να είναι συνεχής.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

β. Να βρείτε την τιμή του μ, ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

γ. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

δ. Για λ = 1 και μ = 2, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^{\pi} f(x)\,dx$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{1-e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. **i.** Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ii. Να αποδείξετε ότι $f''(x) = (e^x - 1)\cdot e^{1+x-e^x}$, να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής της γραφικής της παράστασης.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

γ. Να παραστήσετε γραφικά την f.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της $f'(x)$, τους άξονες x΄x, y΄y και την ευθεία $x = \ln\frac{1}{2}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύουν:

$$\int_1^x f(t)\,dt - 2 = x\int_0^x g(t)\,dt \quad (1) \quad \text{και} \quad g(x) \neq 0 \quad (2)$$

Να αποδείξετε ότι:

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $f'(0) = 2g(0)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

β. $g(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

γ. $\int_1^x f(t)\,dt \leq \int_1^0 f(t)\,dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

δ. Η εξίσωση $f(x) = 2g(x) + 2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να δείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$

Μονάδες 9

Β. **1.** Πότε η ευθεία ψ = λx + β λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +∞;

Μονάδες 3

2. Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β];

Μονάδες 3

Γ. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ):

1. Ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = l$

Μονάδες 2

2. Αν 0<α<1 τότε $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = 0$.

Μονάδες 2

3. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] τότε η f έχει υποχρεωτικά ολικά ακρότατα τα f(α) και f(β).

Μονάδες 2

4. Για τις συναρτήσεις f και g που έχουν συνεχείς παραγώγους στο [α,β] ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x)g'(x)dx - \int_\beta^a f'(x)g(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^\beta$$

Μονάδες 2

5. Αν για κάθε στοιχείο ψ του συνόλου τιμών της f(x), η f(χ)=ψ έχει λύση ως προς x τότε η f είναι 1-1.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{1}{z} = -1$, $z \in C$ και z_1, z_2 οι ρίζες της. Να αποδείξετε ότι:

Α. $z_1 \cdot z_2 = 1$ και $z_1^3 = 1$.

Μονάδες 4

Β. $(z_1^{2009} + z_2^{2009}) \in R$.

Μονάδες 4

Γ. $z_1^8 + \frac{1}{z_2^{10}} + 1 = 0$

Μονάδες 4

Δ. Αν $f(x)$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με

$$f(0)-2 = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \quad \text{και} \quad f(1) = \frac{1}{2z_1} + \frac{1}{2z_2} - \frac{3}{2}$$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$, ώστε $f(x_0) = 3x_0 - 2$.

Μονάδες 7

Ε. Αν Γ είναι η εικόνα του μιγαδικού $w = 2z_1 + 2z_2$ και Α, Β οι εικόνες των z_1 και z_2 αντίστοιχα, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 2 + 2\ln x$.

Α. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη.

Μονάδες 6

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f.

Μονάδες 6

Γ. Αν $g(x) = \frac{x \cdot \ln x}{x+2}$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ ώστε:

$$g(x) \geq g(x_0) \text{ για κάθε } x > 0.$$

Μονάδες 7

Δ. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 2$ ισχύει: $f(x-2) < 2f(x+1) - f(x+4)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{e^x} \quad \text{και} \quad f(1) = \frac{1}{e}$$

Α. Να δείξετε ότι $f(x) = x \cdot e^{-1/x}$.

Μονάδες 8

Β. **1.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f(x) στο σημείο με τετμημένη $x = 1$.

Μονάδες 2

2. Να δείξετε ότι $\int_1^2 f(x)dx > \frac{2}{e}$.

Μονάδες 7

Γ. Αν $g(x) = \frac{f(x)}{x^3}$, να βρείτε το εμβαδόν E(t) του χωρίου που περικλείεται από τη Cg, τον x΄x και τις ευθείες x=1 και x=t με $t > 1$.

Μονάδες 5

Δ. Να βρείτε το $\lim_{t \to +\infty} E(t)$.

Μονάδες 3

Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝ.ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σ΄ ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

(Μονάδες 10)

Β.1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

(Μονάδες 3)

Β.2. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του παράγωγου αριθμού στο σημείο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f.

(Μονάδες 2)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν $z_1^2 + z_2^2 = 0$ και $z_1, z_2 \in \mathrm{C}$ αναγκαστικά $\mathrm{z}_1 = \mathrm{z}_2 = 0$.

β) Αν $g(x) \neq \alpha$ κοντά στο x_0 με $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \alpha$ και $\lim\limits_{y \to \alpha} f(y) = l$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = l$.

γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\beta)$ μέγιστη τιμή της συνάρτησης, τότε κατ΄ ανάγκη θα είναι $f'(\beta) = 0$.

δ) Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ, τότε $f''(x) > 0$.

ε) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2, 5]$ και $f(x) \leq 0$ στο $[2, 5]$, τότε $\int_{5}^{2} f(x)dx \geq 0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2ο

Οι μιγαδικοί αριθμοί z, w συνδέονται με τη σχέση $z=\frac{1+2w}{1-w}$ και η εικόνα του w ανήκει στον κύκλο με κέντρο $\mathrm{K}(-1,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

α) Να δείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο με κέντρο το Ο(0, 0) και ακτίνα
$\rho = 1$.

(Μονάδες 6)

β) Αν $|z|=1$ (1) και $z_1, z_2,\ z_3$ οι εικόνες τριών μιγαδικών αριθμών για τους οποίους ισχύει η σχέση (1) να δείξετε ότι:

i) Ο αριθμός $\alpha=\frac{z_1+z_2}{z_3}+\frac{z_2+z_3}{z_1}+\frac{z_1+z_3}{z_2}$ είναι πραγματικός.

(Μονάδες 7)

ii) Αν επιπλέον $z_1+z_2+z_3=0$ τότε να αποδείξετε ότι:
$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}\right)=-\frac{3}{2}$$

(Μονάδες 7)

γ) Δίνεται η ευθεία (ε): $3x+4y-12=0$. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση των εικόνων του μιγαδικού w από την ευθεία (ε).

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ τέτοια, ώστε για κάθε $x>0$ ισχύουν $x\,f'(x)=\frac{x+1}{e^{f(x)}+1}$ και $f(1)=0$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^x+x$ είναι 1-1.

(Μονάδες 2)

β) Να δείξετε ότι $f(x)=\ln x$ για κάθε $x>0$.

(Μονάδες 6)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x)=\frac{f(x)-1}{x}$ ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{\eta\mu x}{e}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right)^{\eta\mu x}$ αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(Μονάδες 5)

ε) Να εξετασθεί η h ως προς κυρτότητα και να δείξετε ότι για κάθε x_1, x_2 με $x_2 > x_1 > 0$ ισχύει $\frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} \geq -\frac{1}{2e^5}$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω συνάρτηση $f : R \to R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $\int_3^x \left(\int_1^u f(t)dt \right) du \geq 2x - 6$ για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_1^3 f(t)dt = 2$.

(Μονάδες 7)

β) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α$(0, f(0))$ είναι η ευθεία $4x + y - 3 = 0$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x t^2 f(t)dt - x^3}{x^4}$.

(Μονάδες 5)

γ) Αν για κάθε $x \geq 1$ ισχύει $f'(x) > 0$ και $h(x) = \int_1^x f(t)dt$, να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει $h'(x) > \frac{h(x)}{x-1}$.

(Μονάδες 7)

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,3)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) + 3 = 2\xi$.

(Μονάδες 6)

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Α. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Β. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Γ. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Rolle.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Δ. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

1. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z είναι $z + \overline{z} = 2Re(z)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

2. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = +\infty$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

3. Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$, αν ορίζεται η συνάρτηση $\frac{f}{g}$, τότε έχει πεδίο ορισμού την τομή $A \cap B$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

4. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

5. $\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g'(x)dx = [f(x)\cdot g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)\cdot g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f\ (x)\ =\ 4x^3\ +\ 12\lambda x^2\ +\ (\lambda - 1)x\ ,\quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει στο $x_0 = -1$ καμπή.

α. **i.** Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \to -3} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

γ. **i.** Να βρείτε την αρχική της f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $(0, 1)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ΘΕΜΑ 3

Έστω μια συνεχής συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f\ (\eta\mu x)\ +\ f\ (\sigma\upsilon\nu x)\ =\ 1,\ \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$ και $f(0) + f(1) = 1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ii. Υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0)\ +\ x_0\ =\ 1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

β. Έστω, επιπλέον, ότι η f είναι παραγωγίσιμη και $f(x) \geq \sqrt{2}\,x - \frac{1}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε την $f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ii. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(1) - f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

ΘΕΜΑ 4

Α. Να αποδείξετε ότι $e^x - x \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Πότε ισχύει η ισότητα $e^x - x = 1$;

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

Β. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$. Για κάθε $x \geq 0$ θεωρούμε το μιγαδικό z, με:

$$z = \int_0^x e^{f(t)}dt + ix\int_0^1 e^{f(x-xt)}dt \quad \text{και} \quad \frac{|z|}{\sqrt{2}} = \int_0^x [f(t)+e^t]dt + f(\alpha) - 1,$$

όπου $\alpha > 0$.

Να αποδείξετε ότι:

α. **i.** $\frac{z}{1+i} = Re(z) = Im(z) \geq 0$, για κάθε $x \geq 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ii. $e^{f(x)} = f(x) + e^x$, για κάθε $x \geq 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

β. Η f είναι γνησίως αύξουσα.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

γ. Η f έχει αντίστροφη και να βρείτε την αντίστροφή της.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιο, ώστε $\alpha f'(\xi) = 1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 2001

ΘΕΜΑ 1

Απάντηση:

Α1. Θεωρία παράγραφος 2.3 σχολικού βιβλίου.

Α2. α. Σωστό
β. Λάθος
γ. Λάθος
δ. Σωστό
ε. Σωστό

Β1. 1. ζ
2. γ
3. α
4. δ
5. β

Β2. $|z| = 1$ άρα $|z|^2 = 1$

ΘΕΜΑ 2

Απάντηση:

α) Θέτουμε $x\,t = u$ και διαφορίζουμε ως προς t.
Έτσι έχουμε $d(x\,t) = du$ ή $x\,dt = du$

Ακόμα για

- $t = 0$ έχουμε $u = 0$ και
- $t = 1$ έχουμε $u = x$.

Άρα:

$$f(x) = 1 - 2x^2\int_0^1 tf^2(xt)dt = 1 - 2\int_0^1 x^2tf^2(xt)dt = 1 - 2\int_0^x uf^2(u)du$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\Re$, προκύπτει ότι η συνάρτηση

$$\int_0^x uf^2(u)du$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$. Άρα: $f'(x) = -2x\,f^2(x)$

β) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ με:

$$g'(x)=\left(\frac{1}{f(x)}-x^2\right)' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}-2x\overset{(a)}{=}$$

$$=-\frac{-2xf^2(x)}{f^2(x)}-2x=+2x-2x=0$$

για κάθε x $\in \Re$. Επομένως η g(x) σταθερή.

γ) (α' τρόπος)

Επειδή η συνάρτηση g είναι σταθερή δηλαδή g(x) = c για κάθε x $\in \Re$, θα είναι για x = 0: g(0) = c.

Ακόμα:

$$g(0)=\frac{1}{f(0)}-0^2=\frac{1}{f(0)}$$

οπότε:

$$\frac{1}{f(0)}=c$$

Από την (ii) για x = 0 έχουμε f(0) = 1.

Επομένως: c = 1.

Άρα: g(x) = 1 και λόγω της:

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}-x^2$$

προκύπτει:

$$1=\frac{1}{f(x)}-x^2 \Leftrightarrow 1+x^2=\frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

γ) (β' τρόπος)

Από f ' (x) = -2x f(x) και επειδή f(x) ≠ 0 για κάθε x ∈ ℜ είναι:

$$-\frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x$$

ή

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = (x^2)'$$

Άρα:

$$\frac{1}{f(x)} = x^2 + c, \quad c \in \Re$$

Όμως:

$$f(0) = 1 - \int_0^0 uf^2(u)du = 1$$

Έτσι:

$$\frac{1}{f(0)} = 0^2 + c$$

1 = c.

Οπότε:

$$\frac{1}{f(x)} = x^2 + 1$$

Άρα:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

δ) Επομένως:

$$x \cdot f(x) \cdot \eta\mu 2x = x \cdot \frac{1}{1+x^2}\eta\mu 2x =$$

$$= \frac{x}{1+x^2}\eta\mu 2x, \quad x \in \Re$$

Έχουμε:

$$\left|\frac{x}{1+x^2}\eta\mu 2x\right| = \left|\frac{x}{1+x^2}\right| |\eta\mu 2x| \leq \left|\frac{x}{1+x^2}\right|$$

οπότε:

$$\left|\frac{x}{1+x^2}\eta\mu 2x\right| \leq \left|\frac{x}{1+x^2}\right|, \quad x \in \Re$$

ή

$$-\left|\frac{x}{1+x^2}\right| \leq \left(\frac{x}{1+x^2}\eta\mu 2x\right) \leq \left|\frac{x}{1+x^2}\right|, \quad x \in \Re$$

Όμως:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2} = 0$$

οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x}{1+x^2}\right| = \left|\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2}\right| = 0$$

Σύμφωνα λοιπόν με το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x^2}\eta\mu 2x\right) = 0$$

ΘΕΜΑ 3

Απάντηση:

α. Αφού *f* συνεχής είναι:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) = 9\alpha$$

Όμως:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(\alpha x^2) = 9\alpha$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\frac{(1-e^{x-3})'}{(x-3)'} = \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{-e^{x-3}}{1}\right) = -1$$

Έτσι: $9\alpha = -1$. Άρα $\alpha = -1/9$

β. Για x > 3 με f παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$f'(x)=\left(\frac{1-e^{x-3}}{x-3}\right)'=\frac{\left(1-e^{x-3}\right)'(x-3)-(1-e^{x-3})(x-3)'}{(x-3)^2}=\frac{-e^{x-3}(x-3)-(1-e^{x-3})}{(x-3)^2}=$$

$$=\frac{-xe^{x-3}+3e^{x-3}-1+e^{x-3}}{(x-3)^2}=\frac{-xe^{x-3}+4e^{x-3}-1}{(x-3)^2}=\frac{(4-x)\,e^{x-3}-1}{(x-3)^2}$$

Έτσι:

$$f'(4)=\frac{-1}{(4-3)^2}=-1$$

και αφού:

$$f(4)=\frac{1-e^{4-3}}{4-3}=\frac{1-e}{1}=1-e$$

η εξίσωση της εφ/νης είναι:

$$y-(1-e)=-1(x-4)\Leftrightarrow y=-x-e+5$$

γ. Επειδή για $x\in[1,2]$ είναι:

$$f(x)=-\frac{1}{9}x^2<0$$

Έχουμε:

$$E=-\int_1^2\left(-\frac{1}{9}x^2\right)dx=-\left[-\frac{1}{9}\frac{x^3}{3}\right]_1^2=$$

$$=+\frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{1}{9}\left[\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right]=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{7}{3}=\frac{7}{27}\quad \text{τ.μονάδες.}$$

Παρατήρηση

Επειδή στην εκφώνηση του θέματος δεν διευκρινίζεται αν στο ερώτημα γ η τιμή του α πρέπει να ληφθεί ως -1/9, παρατηρούμε ότι:

(i) αν το α ληφθεί ως -1/9 τότε η τιμή του εμβαδού είναι:

$$E=\frac{7}{27}\quad \text{τ.μονάδες.}$$

(ii) αν όμως δεν υπονοείται κάτι τέτοιο τότε η λύση θα έχει ως εξής:

- αν $a \geq 0$ τότε $f(x) \geq 0$ οπότε :

$$E = \int_1^2 ax^2 dx = \frac{7a}{3} \quad \text{τ.μονάδες.}$$

- αν $a < 0$ τότε $f(x) < 0$, οπότε:

$$E = -\int_1^2 ax^2 dx = -\frac{7a}{3} \quad \text{τ.μονάδες.}$$

<u>ΘΕΜΑ 4</u>

Απάντηση:

α) Αφού f παραγωγίσιμη στο $\Re$, παραγωγίζουμε την δοσμένη σχέση και έχουμε:

$$3f^2(x)f'(x) + 2\beta f(x)f'(x) + \gamma f'(x) = 3x^2 - 4x + 6, \quad x \in \Re$$

Δηλαδή:

$$f'(x)\cdot[3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma] = 3x^2 - 4x + 6, \quad x \in \Re \qquad (1)$$

Όμως:

$$3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \Re$$

αφού: $\alpha = 3 > 0$ και $\Delta = 4\beta^2 - 12\gamma = 4(\beta^2 - 3\gamma) < 0$

και $3x^2 - 4x + 6 > 0$ για κάθε $x \in \Re$

αφού: $\Delta = 16 - 12\cdot 6 < 0$ και $\alpha = 3 > 0$

Οπότε από την σχέση (1) παίρνουμε: $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Re$

Επομένως δεν υπάρχουν ακρότατα.

β) Επειδή είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Re$, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

γ) Είναι:

$$f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1,\ \ x\in\Re$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=x^3-2x^2+6x-1,\ \ x\in[0,1]$$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ και

$$g(0) = -1 < 0$$
$$g(1) = 4 > 0$$

Άρα, από Θ.Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$: $g(x_0) = 0$ (2)

Για $x = x_0$ η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$f^3(x_0)+\beta f^2(x_0)+\gamma f(x_0)=g(x_0)$$

οπότε από την σχέση (2) είναι:

$$f(x_0)\cdot[f^2(x_0)+\beta f(x_0)+\gamma]=0 \qquad (3)$$

Όμως:

$$f^2(x_0)+\beta f(x_0)+\gamma>0$$

Γιατί:

$$\Delta=\beta^2-4\gamma=(\beta^2-3\gamma)-\gamma<0$$

Αυτό συμβαίνει γιατί:

$$\beta^2 < 3\gamma \quad \text{οπότε} \quad \gamma > 0, \quad \text{άρα} \quad -\gamma < 0$$

Άρα:

$$(\beta^2 - 3\gamma) - \gamma < 0$$

Επομένως, από την σχέση (3) προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$:

$$f(x_0) = 0$$

κι επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1), προκύπτει ότι η λύση x_0 είναι μοναδική στο (0,1).

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 2002

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία. (απόδειξη σελ. 335 σχολ. βιβλίου).
Β.1. Θεωρία (σελίδες 224 - 225) σχολ. βιβλίου)
Β.2. α Λ
β Λ
γ Σ
δ Σ
ε Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) =$
$= i^3 \bullet z + i^8 \bullet z + i^{13} \bullet z + i^{18} \bullet z =$
$= i^2 \bullet i \bullet z + (i^2)^4 \bullet z + (i^2)^6 \bullet i \bullet z + (i^2)^9 \bullet z =$
$= (-1) \bullet i \bullet z + z + (-1)^6 \bullet i \bullet z + (-1)^9 \bullet z =$
$= - i \bullet z + z + i \bullet z - z = 0$

β. $|z| = \rho$, $Arg(z) = \theta$.
Για $\nu = 13$ έχουμε:
$f(13) = i^{13} \bullet z = (i^2)^6 \bullet i \bullet z = (-1)^6 \bullet i \bullet z = i \bullet z$

Επειδή ο μιγαδικός z έχει μέτρο ρ και πρωτεύον όρισμα θ, θα έχει την ακόλουθη τριγωνομετρική μορφή:

$z = |z| \, (συνθ + i\, ημθ) = ρ\, (συνθ + iημθ)$ (1)

Η τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού i είναι:

$$1 \cdot \left(συν\frac{\pi}{2} + i\, ημ\frac{\pi}{2} \right) \qquad (2)$$

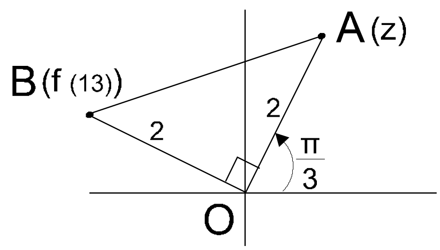
Επομένως ο μιγαδικός αριθμός $f(13) = i \bullet z$ γράφεται:

$$f(13) = \left[1 \cdot \left(συν\frac{\pi}{2} + i\, ημ\frac{\pi}{2} \right) \right] \left[\rho\left(συνθ + i\, ημθ \right) \right] =$$

$$= 1 \cdot \rho \cdot \left[συν\left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + i\, ημ\left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right] =$$

$$= \rho \cdot \left[συν\left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + i\, ημ\left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right]$$

γ. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα και για ρ=2 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ έχουμε: z = $2(συν\frac{\pi}{3} + iημ\frac{\pi}{3})$, f(13) =iz.Έτσι αν Α η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο, η εικόνα Β του f(13) = iz προκύπτει από στροφή της διανυσματικής ακτίνας Α του z κατά $\frac{\pi}{2}$.



Επειδή το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο στο Ο με μήκη κάθετων πλευρών 2, θα έχει εμβαδόν $\frac{2^2}{2} = 2$ τετραγωνικές μονάδες.

ΘΕΜΑ 3ο

α.
Επειδή η f είναι συνάρτηση έχουμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in R$ με $g(x_1) = g(x_2)$ έπεται
$f(g(x_1)) = f(g(x_2))$ ή
$(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$ (1)

Επειδή όμως η $f \circ g$ είναι 1-1 στο $\Re$ προκύπτει από την (1) ότι $x_1 = x_2$.
Έτσι δείξαμε ότι:
$\forall\, x_1, x_2 \in R$ με $g(x_1) = g(x_2)$ προκύπτει $x_1 = x_2$
Άρα η g είναι 1-1.

β.
Έχουμε:

$$g\left(f(x) + x^3 - x\right) = g\left(f(x) + 2x - 1\right)$$

Επειδή η g είναι 1-1 στο R, προκύπτει ότι:

$$f(x) + x^3 - x = f(x) + 2x - 1 \qquad ή$$

$$x^3 - x = +2x - 1 \qquad ή$$

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

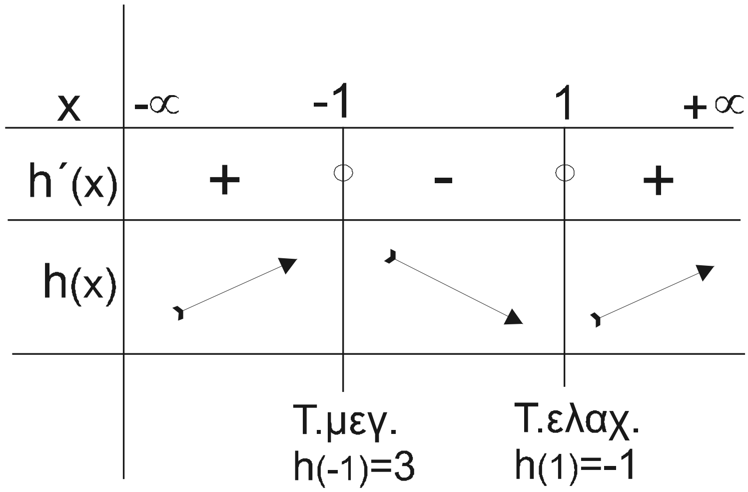
Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$h(x) = x^3 - 3x+1 \qquad , \ x \in R$$

Η h είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με:

$$h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x+1)$$

Η μονοτονία της h(x) φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:



- Η h στο διάστημα [-2, -1] ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano, αφού:
  - Η h συνεχής στο [-2, -1] ως πολυωνυμική και
  - $h(-2)\cdot h(-1) = (-1)\cdot(+3) = -3 < 0$

  Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-2, -1)$ τέτοιο ώστε $h(x_1) = 0$.

  Επειδή η h στο (-∞, -1] είναι γνησίως αύξουσα η παραπάνω ρίζα x_1 είναι μοναδική στο (-∞, -1].

- Έχουμε $h(0) = 1$ και $h(1) = -1$.
  Επειδή η h είναι συνεχής στο [0, 1] και
  $$h(0)\cdot h(1) = 1\cdot(-1) = -1 < 0$$
  προκύπτει ότι στο διάστημα (0, 1) η $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_2. Επειδή ακόμα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο [-1, 1], προκύπτει ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο [-1, 1].

- Έχουμε $h(1) = -1$ και $h(2) = 3$
  Επειδή η h είναι συνεχής στο [1, 2] και
  $$h(1)\cdot h(2) = (-1)\cdot 3 = -3 < 0$$
  προκύπτει ότι στο διάστημα (1, 2) η $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_3. Επειδή ακόμα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο [1, +∞), προκύπτει ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο
  [1, +∞).

  Επειδή:
  - $x_1 \in (-2, -1)$ είναι $x_1 < 0$
  - $x_2 \in (0, 1)$ είναι $x_2 > 0$
  - $x_3 \in (1, 2)$ είναι $x_3 > 0$

  Έτσι η $h(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα στο R.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Θεωρούμε τη συνάρτηση
$\varphi(x) = h(x) - g(x)$ $x \in [\alpha, \beta]$

Η $\varphi(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Επειδή είναι $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ προκύπτει ότι

$\Phi(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Σύμφωνα τώρα με το θεώρημα 3 σελίδα 332 σχολ. βιβλίου έχουμε:

$$\int_a^\beta \varphi(x)\,dx > 0 \quad ή \quad \int_a^\beta (h(x) - g(x))\,dx > 0 \quad ή \quad \int_a^\beta f(x)dx - \int_a^\beta g(x)dx > 0$$

Άρα $\int_a^\beta h(x)\,dx > \int_a^\beta g(x)\,dx$.

β.i.
Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο R έχουμε:

$f'(x) - e^{-f(x)}(-f(x))' = 1$ ή

$f'(x) + f'(x)e^{-f(x)} = 1$ ή

$f'(x)[1 + e^{-f(x)}] = 1$ ή

$f'(x) = \dfrac{1}{1+e^{-f(x)}}$, αφού $1 + e^{-f(x)} \neq 0$ για κάθε $x \in R$

Άρα $f'(x) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{e^{f(x)}}} = \dfrac{e^{f(x)}}{e^{f(x)}+1}$ με $x \in R$.

β.ii.
Επειδή είναι $f(0) = 0$ η ζητούμενη ανίσωση
$\dfrac{x}{2} < f(x) < x f'(x)$ για $x > 0$ γράφεται:
$\dfrac{x}{2} < f(x) - f(0) < x f'(x)$ ή $\dfrac{1}{2} < \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} < f'(x)$.

Η f στο $[0,x]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,x)$: $f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Τότε όμως αρκεί να δειχθεί

$\dfrac{1}{2} < f'(\xi) < f'(x)$ ή

$\dfrac{e^{f(0)}}{1+e^{f(0)}} < f'(\xi) < f'(x)$ ή f΄(0) < f΄(ξ) < f΄(x), με 0 < ξ < x.

Έτσι αρκεί να δειχθεί ότι η f ΄είναι γνησίως αύξουσα στο [0, x].

Υπολογίζοντας την f΄΄(x) έχουμε:

$$f''(x)=\left(\frac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}\right)'=\frac{e^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot(1+e^{f(x)})-e^{f(x)}\cdot e^{f(x)}\cdot f'(x)}{\left(1+e^{f(x)}\right)^2}=\frac{e^{f(x)}\cdot f'(x)}{\left(1+e^{f(x)}\right)^2}=$$

$$=\frac{e^{f(x)}\cdot\dfrac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}}{\left(1+e^{f(x)}\right)^2}=\frac{e^{2f(x)}}{\left[1+e^{f(x)}\right]^3}>0 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Άρα f΄γνησίως αύξουσα στο R άρα και στο [0,x].

β.iii.

Από β.ii. είναι f(x) > $\frac{x}{2}$ > 0 και επειδή η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο R άρα και στο [0,1], θα είναι $E=\int_0^1 f(x)\,dx$.

Οι συναρτήσεις $\frac{x}{2}$, f(x), xf΄(x) είναι συνεχείς στο R, οπότε με βάση το ερώτημα α) από $\frac{x}{2}$ < f(x) < xf΄(x) είναι:

$$\int_0^1\frac{x}{2}dx<\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1 xf'(x)dx \Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1<E<\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 f(x)dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4}<E<f(1)-E.$$

Έτσι $\frac{1}{4}$ < E και 2E < f(1) ⇔ E < $\frac{1}{2}$f(1).

Οπότε τελικά $\frac{1}{4}$ < E < $\frac{1}{2}$ f(1).

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 2003

ΘΕΜΑ 1ο

α. Θεωρία: Θεώρημα σελ. 217 σχολικού βιβλίου

β. Θεωρία: Η απάντηση βρίσκεται στη σελ. 247 του σχολικού βιβλίου

γ.

α-Σ

β-Σ

γ-Σ

δ-Λ

ε-Λ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι:

$$w = 3z - i\overline{z} + 4 = 3(\alpha + \beta i) - i(\alpha - \beta i) + 4 = 3\alpha + 3\beta i - \alpha i - \beta + 4 = (3\alpha - \beta + 4) + (3\beta - \alpha)i$$

Έτσι $Re(w) = 3α - β + 4$ και $Im(w) = 3β - 4$.

β. Οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο είναι τα σημεία $M(3α-β+4, 3β-α)$, όπου $α, β \in \Re$.

Αφού ανήκουν σε ευθεία με εξίσωση $y = x - 12$ είναι:

$3β - α = 3α - β + 4 - 12 \Leftrightarrow 4β - 4α = -8 \Leftrightarrow β - α = -2 \Leftrightarrow β = α - 2$.

Από την τελευταία συνάγεται ότι τα σημεία $N(α,β)$ που είναι οι εικόνες του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$.

γ. Από τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών, των οποίων οι εικόνες κινούνται στην ευθεία (ε): $y = x - 2$, ελάχιστο μέτρο έχει εκείνος του οποίου η εικόνα Κ είναι τέτοια ώστε ΟΚ κάθετη στην (ε). Έτσι:

$$λ_{OK} = -1 \text{ και } OK: y = -x$$

Λύνοντας το σύστημα:

$$y = x - 2, \; y = -x$$

προκύπτει $x = 1$, $y = -1$. Δηλαδή το σημείο Κ έχει συντεταγμένες (1,-1). Άρα ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο από αυτούς που κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$ είναι ο $z = 1 - i$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x$ είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη 2 φορές σε όλο το $\Re$ με:

$f'(x) = (x^5+x^3+x)' = 5x^4+3x^2+1$ και

$f''(x) = (5x^4+3x^2+1)' = 20x^3+6x$

- Επειδή είναι $f'(x) = 5x^4+3x^2+1 > 0$ για κάθε $x \in \Re$, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\Re$.
- $f''(x)=0 \Leftrightarrow 20x^3+6x=0 \Leftrightarrow 2x(10x^2+3)=0 \Leftrightarrow x=0$ εφόσον $10x^2+3>0$ για κάθε $x \in \Re$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$		$\cup$

Επομένως η f είναι:

- κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και
- κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$.
- Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\Re$ θα είναι 1-1 σε αυτό και συνεπώς η f είναι αντιστρέψιμη στο $\Re$.

β. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$ (ερώτημα α). Προκειμένου να δείξουμε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \Re$, αρκεί να δείξουμε ότι:

$e^x \geq 1+x$ για κάθε $x \in \Re$.

Πράγματι, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x-1-x$ στο $\Re$, η οποία είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με $g'(x)=e^x-1$. Από την εξίσωση $g'(x)=0$ έχουμε $e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

Έχουμε:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	-	0	+
g	γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

ελάχ. $g(0) = 0$

Επομένως $g(x) \geq g(0)=0$ για κάθε $x \in \Re$ ή $e^x-1-x \geq 0$ για κάθε $x \in \Re$ και άρα:

$e^x \geq 1+x$ για κάθε $x \in \Re$

γ. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο (0,0) έχει εξίσωση
$y-f(0) = f'(0)(x-0)$ ή $y-0 = 1(x-0)$ ή $\boxed{y=x}$
που είναι η διχοτόμος της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων. Επειδή τώρα η f είναι αντιστρέψιμη (ερώτημα α) προκύπτει ότι υπάρχει η f^{-1} ή οποία (λόγω πρότασης σελ. 155 σχολ. βιβλ.) έχει $C_{f^{-1}}$ συμμετρική την C_f ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία $y=x$

δ. Για κάθε $x\in[0,3]$ είναι: $x \geq 0$ και επειδή η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό (*), θα είναι $f^{-1}(x) \geq f^{-1}(0) \Leftrightarrow f^{-1}(x) \geq 0$. (αφού $f^{-1}(0) = 0$ **)

Έτσι το εμβαδόν του ζητουμένου χωρίου ισούται με: $E = \int_0^3 f^{-1}(y)dy$.

Θέτουμε $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow y=f(x)$. (1)

Διαφορίζοντας την (1) λαμβάνουμε: $dy=d[f(x)]=f'(x)dx$ και

$$y\Big|_0^3 \to x\Big|_{f(x)=0}^{f(x)=3} \to x\Big|_{x^5+x^3+x=0}^{x^5+x^3+x=3} \to x\Big|_0^1$$ (***), άρα

$$E=\int_0^1 x\cdot f'(x)dx=\int_0^1 x(x^5+x^3+x)'dx=\int_0^1(5x^5+3x^3+x)dx=5\int_0^1 x^5dx+3\int_0^1 x^3dx+\int_0^1 xdx=$$

$$=5\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1+3\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=5\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{25}{12}\text{τ.μ.}$$

Αιτιολογήσεις για το ερώτημα δ του 3ου θέματος:

(*) Η f^{-1} είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $\Re$, σύμφωνα με την πρόταση που λέει ότι αν η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε διάστημα Δ τότε υπάρχει η αντίστροφή της η οποία είναι επίσης συνεχής στο f(Δ) και διατηρεί το ίδιο είδος μονοτονίας με την f. (Η πρόταση αυτή, όμως, δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο και αναφέρεται για λόγους μαθηματικής πληρότητας. Έτσι, η μη αναφορά σε αυτήν από κάποιο μαθητή δεν έχει βαθμολογικές απώλειες).

(**) Ισχύει ότι: $f^{-1}(0)=0$. Πράγματι για x=0 έχουμε: $f^{-1}(0)=y \Leftrightarrow f(f^{-1}(0))=f(y) \Leftrightarrow 0=f(y) \Leftrightarrow 0=y^5+y^3+y \Leftrightarrow y(y^4+y^2+1)=0 \Leftrightarrow y=0$.

(***)

- **Η εξίσωση $x^5+x^3+x=3$ έχει μοναδική λύση την x=1 γιατί η f(x) είναι 1-1 στο $\Re$ και επομένως κάθε οριζόντια ευθεία, οπότε και η y=3, τέμνει την C_f σε μοναδικό σημείο.**
- **Η εξίσωση $x^5+x^3+x=0$ έχει μοναδική λύση την x=0, γιατί $x(x^4+x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=0$, αφού $x^4+x^2+1>0$ για κάθε $x \in \Re$.**

ΘΕΜΑ 4ο

α. Αφού η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα με άκρα γ, δ και $f(\gamma)\cdot f(\delta) < 0$, εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano από το οποίο συνάγεται ότι υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα x_0 που ανήκει στο ανοιχτό διάστημα με άκρα γ, δ ώστε $f(x_0) = 0$.

β. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\gamma < \delta$ και $f(\gamma) > 0$, $f(\delta) < 0$, οπότε $\alpha < \gamma < x_0 < \delta < \beta$.

i) Στο διάστημα [α, γ] είναι:

f(α) = 0, f(γ) > 0, άρα f(α) < f(γ) και επειδή είναι α < γ συνάγεται ότι:

$$\frac{f(\alpha)-f(\gamma)}{\alpha-\gamma}>0 \qquad (1)$$

Όμως από το θεώρημα μέσης τιμής (ΘΜΤ) για την f στο διάστημα [α,γ], υπάρχει $\kappa_1 \in (\alpha,\gamma)$ ώστε $f'(\kappa_1)=\frac{f(\alpha)-f(\gamma)}{\alpha-\gamma}$ και λόγω της (1) $f'(\kappa_1) > 0$.

ii) Εργαζόμενοι ομοίως, στο διάστημα $[\gamma,x_0]$ έχουμε:

$f(\gamma) > 0$, $f(x_0) = 0$ άρα $f(\gamma) > f(x_0)$ και επειδή είναι $\gamma < x_0$ συνάγεται:

$$\frac{f(\gamma)-f(x_0)}{\gamma-x_0}<0 \qquad (2)$$

Από το ΘΜΤ για την f στο διάστημα $[\gamma, x_0]$ έχουμε ότι υπάρχει $\kappa_2 \in (\gamma, x_0)$ ώστε

$$f'(\kappa_2) = \frac{f(\gamma) - f(x_0)}{\gamma - x_0}$$

και λόγω της (2) είναι $f'(\kappa_2) < 0$.

iii) Για το διάστημα $[x_0, \delta]$ όμοια έχουμε ότι υπάρχει $\kappa_3 \in (x_0, \delta)$ ώστε

$$\frac{f(\delta) - f(x_0)}{\delta - x_0} = f'(\kappa_3) < 0$$

iv) Για το διάστημα $[\delta, \beta]$ όμοια έχουμε ότι υπάρχει $\kappa_4 \in (\delta, \beta)$ ώστε

$$\frac{f(\beta) - f(\delta)}{\beta - \delta} = f'(\kappa_4) > 0$$

v) Είναι $f'(\kappa_1) > 0$, $f'(\kappa_2) < 0$ άρα $f'(\kappa_1) > f'(\kappa_2)$ και επειδή $\kappa_1 < \kappa_2$, είναι:

$$\frac{f'(\kappa_1) - f'(\kappa_2)}{\kappa_1 - \kappa_2} < 0$$

Όμως για την f' εφαρμόζεται το ΘΜΤ στο διάστημα $[\kappa_1, \kappa_2]$, οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (\kappa_1, \kappa_2)$ ώστε

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(\kappa_1) - f'(\kappa_2)}{\kappa_1 - \kappa_2} < 0$$

vi) Είναι $f'(\kappa_3) < 0$, $f'(\kappa_4) > 0$, άρα $f'(\kappa_3) < f'(\kappa_4)$ και επειδή $\kappa_3 < \kappa_4$ είναι

$$\frac{f'(\kappa_3) - f'(\kappa_4)}{\kappa_3 - \kappa_4} > 0$$

Όμως για την f' εφαρμόζεται το ΘΜΤ στο διάστημα $[\kappa_3, \kappa_4]$, οπότε υπάρχει $\xi_2 \in (\kappa_3, \kappa_4)$ ώστε

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(\kappa_3) - f'(\kappa_4)}{\kappa_3 - \kappa_4} > 0$$

Δείξαμε έτσι ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$.

γ. Από το β ερώτημα με βάση το θεώρημα Bolzano για την f'' στο κλειστό διάστημα με άκρα ξ_1, ξ_2 προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο ξ_0 που ανήκει στο ανοικτό διάστημα με άκρα ξ_1, ξ_2 ώστε $f''(\xi_0) = 0$.

Το σημείο ξ_0 θα ήταν σημείο καμπής της συνάρτησης εφόσον η f'' άλλαζε πρόσημο εκατέρωθεν αυτού. Όμως κάτι τέτοιο δεν εξασφαλίζεται από τα δεδομένα του θέματος.

<u>β΄ τρόπος λύσης για το θέμα 4β:</u>

Από το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής για την f που είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ εξασφαλίζεται ότι υπάρχουν δύο σημεία $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ με $x_1 < x_2$ ώστε $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Εφόσον η f παίρνει μία τουλάχιστον αρνητική τιμή και μία τουλάχιστον θετική (πράγμα που συνεπάγεται από την δοσμένη σχέση $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$), η ελάχιστη τιμή $f(x_1)$ θα είναι αρνητική, ενώ η μέγιστη τιμή $f(x_2)$ θα είναι θετική.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) άρα και στα εσωτερικά σημεία x_1, x_2, που επειδή είναι θέσεις ακρότατων από το θ. Fermat συνάγεται ότι $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f' δεν μπορεί να είναι η σταθερή μηδενική διότι τότε η f θα ήταν σταθερή και άρα $f(x_1) = f(x_2)$ ή $f_{max} = f_{min}$ – άτοπο διότι υπάρχουν τα δοσμένα γ,δ για τα οποία ισχύει από υπόθεση $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$.

Συνεπώς υπάρχει σημείο $x_3 \in (x_1, x_2)$ ώστε $f'(x_3) > 0$ ή $f'(x_3) < 0$. Έστω πχ $f'(x_3) > 0$.

Τότε

- από ΘΜΤ για την f΄ στο $[x_1,x_3]$, υπάρχει $\xi_1 \in (x_1, x_3)$ ώστε:

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(x_3) - f'(x_1)}{x_3 - x_1} = \frac{f'(x_3)}{x_3 - x_1} > 0$$

- από ΘΜΤ για την f΄ στο $[x_3, x_2]$, υπάρχει $\xi_2 \in (x_3, x_2)$ ώστε:

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(x_2) - f'(x_3)}{x_2 - x_3} = \frac{-f'(x_3)}{x_2 - x_3} < 0$$

Αν υποθέταμε $f(x_3) < 0$ θα προέκυπτε $f''(\xi_1) < 0$, $f''(\xi_2) > 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΕΤΟΣ 2003

ΘΕΜΑ 1°

Α. α. Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \Re$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού
$G'(x) = [F(x) + c]' = F'(x) + c' = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

β. Έστω G μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε:

$$F'(x) = G'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Επομένως $G(x) = F(x) + c$, $c \in \Re$, για κάθε $x \in \Delta$.

για κάθε $x \in \Delta$.

Β.

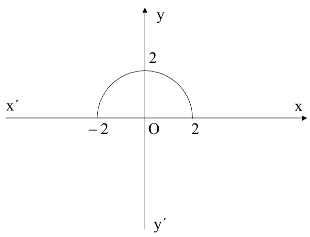
α	**β**	**γ**	**δ**
Σ	Λ	Λ	Σ

Γ. Κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, λέγεται η ευθεία $x = x_0$ όταν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ να είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο που ικανοποιεί την εξίσωση $|z| = 2$ είναι κύκλος με κέντρο O(0, 0), ακτίνα R = 2 και αν $z = x + y\cdot i$, με $x, y \in \Re$ έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 4$.

Αφού $\text{Im}(z) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$, θέλουμε το μέρος του κύκλου πάνω από τον άξονα x΄x, άρα το σύνολο (Σ) είναι το ημικύκλιο με εξίσωση $x^2 + y^2 = 4$, για $y \geq 0$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



β. Έστω $\alpha, \beta \in \Re$, με $z = \alpha + \beta\cdot i$, όπου $z \neq 0 \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ και αφού $\text{Im}(z) \geq 0$, έχουμε $\beta > 0$,
ενώ $|z| = 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 4$ **(Ι)**

με $0 < \beta \leq 2$ και $-2 \leq \alpha \leq 2$.

Έστω επίσης $w = x + y\cdot i$, όπου $x, y \in \Re$. Τότε:

$$w = \frac{1}{2}\cdot\left(z + \frac{4}{z}\right) \Leftrightarrow x + yi = \frac{1}{2}\cdot\left(\alpha + \beta i + \frac{4}{\alpha + \beta i}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x+yi=\frac{1}{2}\cdot\left(\alpha+\beta i+\frac{4(\alpha-\beta i)}{(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)}\right)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x+yi=\frac{1}{2}\cdot\left(\alpha+\beta i+\frac{4(\alpha-\beta i)}{\alpha^2+\beta^2}\right)\ \Leftrightarrow$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} x+yi=\frac{1}{2}\cdot\left(\alpha+\beta i+\frac{4(\alpha-\beta i)}{4}\right)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x+yi=\frac{1}{2}\cdot\left(\alpha+\beta i+\alpha-\beta i\right)\ \Leftrightarrow\ x+yi=\alpha\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases} x=\alpha \\ y=0 \end{cases},\ \text{όπου } -2\le\alpha\le 2.$$

Επομένως η εικόνα του w κινείται στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με άκρα Α(–2, 0) και Β(2, 0), που βρίσκεται πάνω στον άξονα x΄x.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\Re$ και για x > 0, έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = 0\,,$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right) = 2$.

β. Για x < 0, έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}{x} = -2\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+2x]=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=0$$

αφού $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x}=0$ και $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)=2$.

Συνεπώς η πλάγια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$ είναι η ευθεία $y=-2x$.

γ. Η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\Re$ με $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x-1=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1$.

Τότε:

$$f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}=x-\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}-x+\sqrt{x^2+1}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}+f(x)=0.$$

δ. Για $x\geq 0$ ισχύει $f(x)>0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}-x>0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>x\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}^2>x^2\Leftrightarrow$ $x^2+1>x^2\Leftrightarrow 1>0$, που ισχύει άρα και η αρχική.

Αφού $f(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$, έχουμε ότι:

$$(\gamma)\Leftrightarrow f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}=-f(x)\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=-\frac{f'(x)}{f(x)},$$

άρα

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1\left\{-\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1\{-\ln[f(x)]\}'dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\left[-\ln[f(x)]\right]_0^1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=-\ln[f(1)]+\ln[f(0)]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=-\ln(\sqrt{2}-1)=\ln(\sqrt{2}-1)^{-1}=\ln\frac{1}{\sqrt{2}-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}^2-1^2}=\ln(\sqrt{2}+1).$$

ΘΕΜΑ 4ο

α. *1ος τρόπος*

Έστω ότι η f είναι δεν γνησίως μονότονη στο $\Re$, οπότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Re$ με $f'(x_1) > 0$ και $f'(x_2) < 0$.

Θεώρημα Bolzano για την f′ στο $[x_1, x_2]$ (αν $x_1 < x_2$)
ή στο $[x_2, x_1]$ (αν $x_1 > x_2$).

- Η f′ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2] \subseteq \Re$ ή στο $[x_2, x_1] \subseteq \Re$
- $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$

άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ ή (x_2, x_1) έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$, ΑΤΟΠΟ,

άρα η f είναι γνησίως μονότονη.
<u>2^ος^ τρόπος</u>
Αφού f′ συνεχής στο $\Re$ και $f'(x) \neq 0$, τότε $f'(x) > 0$ ή
$f'(x) < 0$, δηλαδή, η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.

β. Για $x = 1$ από την $f(x) = -f(2 - x)$ παίρνουμε ότι:
$f(1) = -f(1) \Leftrightarrow 2f(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$,
δηλαδή, η $x = 1$ είναι ρίζα της $f(x) = 0$.
Όμως η f είναι γνησίως μονότονη,
άρα η ρίζα $x = 1$ είναι μοναδική.

γ. Η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο $\Re$, αφού $A_f = A_{f'} = \Re$ και $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Re$.

Το σημείο τομής της C_g με τον άξονα x΄x είναι το (1, 0), αφού:
$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (από το β ερώτημα).
Επίσης για x κοντά στο 1, έχουμε:

$$g'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{f(x)}{f'(x)}-0}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)}{x-1}\cdot\frac{1}{f'(x)}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{f'(x)}\right\} \overset{f'\ \text{συνεχης στο } 1}{=\!=\!=\!=\!=\!=} f'(1)\cdot\frac{1}{f'(1)} = 1 = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4},$$

δηλαδή, η εφαπτομένη της C_f στο (1, 0) σχηματίζει γωνία 45^o με τον άξονα x΄x.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 2004

ΘΕΜΑ1ο

Α. Θεώρημα (Fermat) σελ. 260 σχολ. βιβλίου.

Β. Ορισμός σελ. 213 σχολ. βιβλίου.

Γ.

α	β	γ	δ	ε
Σ	*	Λ	Λ	Σ

(*) Η απάντηση στο ερώτημα 1 Γ β μπορεί να χαρακτηρισθεί Σωστό μόνο εφ' όσον η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε σύνολο της μορφής $(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$. Όπως είναι διατυπωμένη, σωστό είναι μόνο το αντίστροφο. Δηλαδή αν $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=l$, αφού για την περίπτωση του ευθέως μπορεί να θεωρηθούν ως σύνολα ορισμού της f και τα μεμονωμένα σύνολα (a,x_0) ή (x_0,β). Επομένως από <u>αυστηρή μαθηματική άποψη</u>, η απάντηση είναι Λάθος.

ΘΕΜΑ1ο

α. Πρέπει x>0. Άρα $A_f=(0,+\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων σ' αυτό με

$$f'(x)=(x^2\cdot\ln x)'=(x^2)'\cdot\ln x+x^2(\ln x)'=$$
$$=2x\cdot\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=2x\cdot\ln x+x=x\cdot(2\ln x+1)$$

Έχουμε:
$f'(\mathrm{x})=0 \Leftrightarrow \; x\cdot(2\ln x+1)=0$. Οπότε:
x=0 απορρίπτεται αφού $A_f=(0,+\infty)$

ή $2\ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}$.

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
f΄		-	0	+	
f		↘		↗	

T. min.

Επομένως η συνάρτηση f είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο $(0, e^{-\frac{1}{2}}]$, αφού είναι συνεχής στο $(0, e^{-\frac{1}{2}}]$ και ισχύει ότι f ′(x) <0 στο $(0, e^{-\frac{1}{2}})$.

- Γνησίως αύξουσα στο $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$ και ισχύει ότι f �given΄ (x) >0 στο $(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$.

Άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = e^{-\frac{1}{2}}$ το

$$f(e^{-\frac{1}{2}}) = (e^{-\frac{1}{2}})^2 \cdot \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot e^{-1} = -\frac{1}{2e}$$

β. Η f είναι και 2η φορά παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως γινόμενο δις παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε αυτό μέ $f''(x) = (2x \cdot \ln x + x)' = 2\ln x + 2 + 1 = 2\ln x + 3$.

Έχουμε:

$$f''(\mathrm{x}) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x + 3 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}}$$

x	0		$e^{-3/2}$		$+\infty$
f΄΄		-	0	+	
f					

Σ.Κ

$$f(e^{-\frac{3}{2}}) = (e^{-\frac{3}{2}})^2 \cdot \ln(e^{-\frac{3}{2}}) = -\frac{3}{2}e^{-3} = -\frac{3}{2e^3}.$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι:

- κοίλη στο $(0, e^{-\frac{3}{2}}]$
- κυρτή στο $[e^{-\frac{3}{2}}, +\infty)$.

Άρα παρουσιάζει σημείο καμπής το Μ $(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2e^3})$.

γ. Είναι:

- $$\lim_{x \to o^+} f(x) = \lim_{x \to o^+} x^2 \ln x = \lim_{x \to o^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \overset{(De\,L'Hospital)}{=}$$

$$= \lim_{x \to o^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2x}{x^4}} = \lim_{x \to o^+} \left(-\frac{x^4}{2x^2}\right) = -\lim_{x \to o^+} \frac{x^2}{2} = 0.$$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2 \cdot \ln x\right) = +\infty$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $(0, e^{-\frac{1}{2}}]$, είναι

$$f\left((0, e^{-\frac{1}{2}}]\right) = [-\frac{1}{2e}, 0).$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$ είναι

$$f\left([e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)\right) = [-\frac{1}{2e}, +\infty).$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f\left((0,+\infty)\right) = [-\frac{1}{2e}, 0) \cup [-\frac{1}{2e}, +\infty) = [-\frac{1}{2e}, +\infty)$.

Έτσι, το τοπικό ακρότατο απο το ερώτημα α, μπορεί να χαρακτηριστει και ως ολικό ελάχιστο.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Αφού f παραγωγίσιμη στο R, τότε και η g είναι παραγωγίσιμη στο R ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε αυτό. Άρα η g είναι και συνεχής στο R.

Έτσι η g είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{3}{2}\right] \subseteq \mathrm{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3}{2}\right) \subseteq \mathrm{R}$ με

$g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x)$.

Επίσης είναι $\left.\begin{array}{l} g(0) = e^0 f(0) = 0 \\ g\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \end{array}\right|$ άρα $g(0) = g\left(\frac{3}{2}\right)$.

Οπότε από θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ ώστε

$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\xi} f(\xi) + e^{\xi} f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\xi}(f(\xi)) + f'(\xi) = 0$.

Όμως $e^{\xi} \neq 0$ άρα προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ ώστε

$$f'(\xi) = -f(\xi).$$

β. Αφού $f(x) = 2x^2 - 3x$ είναι

$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} g(x)dx = \int_{\alpha}^{0} e^x\left(2x^2 - 3x\right)dx = \int_{\alpha}^{0}\left(e^x\right)'\left(2x^2 - 3x\right)dx =$

$= \left[e^x\left(2x^2 - 3x\right)\right]_{\alpha}^{0} - \int_{\alpha}^{0} e^x (2x^2 - 3x)'\,dx =$

$= \left[e^x\left(2x^2 - 3x\right)\right]_{\alpha}^{0} - \int_{\alpha}^{0} e^x (4x - 3)dx = \left[e^x\left(2x^2 - 3x\right)\right]_{\alpha}^{0} - \int_{\alpha}^{0}\left(e^x\right)'(4x - 3)dx =$

$= \left[e^x\left(2x^2 - 3x\right)\right]_{\alpha}^{0} - \left[e^x\left(4x - 3\right)\right]_{\alpha}^{0} + \int_{\alpha}^{0} e^x (4x - 3)'\,dx =$

$$= \left[e^x\left(2x^2-3x\right)\right]_\alpha^0 - \left[e^x\left(4x-3\right)\right]_\alpha^0 + \int_\alpha^0 e^x \cdot 4dx =$$

$$= \left[e^x\left(2x^2-3x\right)\right]_\alpha^0 - \left[e^x\left(4x-3\right)\right]_\alpha^0 + 4\left[e^x\right]_\alpha^0 =$$

$$= -e^\alpha\left(2\alpha^2-3\alpha\right) - e^0(-3) + e^\alpha(4\alpha-3) + 4e^0 - 4e^\alpha =$$

$$= -e^\alpha\left(2\alpha^2-3\alpha\right) + 3 + e^\alpha(4\alpha-3) + 4 - 4e^\alpha = 7 + e^\alpha\left(4\alpha - 3 - 2\alpha^2 + 3\alpha - 4\right) =$$

$$= 7 + e^\alpha\left(-2\alpha^2 + 7\alpha - 7\right).$$

Άρα $I(\alpha) = 7 + e^\alpha\left(-2\alpha^2 + 7\alpha - 7\right), \alpha \in R$.

γ. Είναι για α < 0 , $I(\alpha) = 7 + e^\alpha \cdot a^2\left[-2 + \frac{7}{a} - \frac{7}{a^2}\right]$.

Έχουμε $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\left(e^\alpha \cdot \alpha^2\right) = \lim\limits_{\alpha\to-\infty}\frac{\alpha^2}{\frac{1}{e^\alpha}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{\alpha\to-\infty}\frac{2\alpha}{-e^{-\alpha}} \overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=} \lim\limits_{\alpha\to-\infty}\frac{2\alpha}{e^{-\alpha}} = 0$

και $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\left[-2 + \frac{7}{\alpha} - \frac{7}{\alpha^2}\right] = -2$

Άρα $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} I(\alpha) = 7 + 0(-2) = 7$.

ΘΕΜΑ4ο

α. Η συνάρτηση g(x) γράφεται:

$$g(x) = |z| \cdot \int_1^{x^3} f(t)dt - 3 \cdot \left|z + \frac{1}{z}\right| \cdot (x-1).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο R, η συνάρτηση φ(x)= $\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Ακόμα, η συνάρτηση $h(x) = x^3$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική.

Έτσι η συνάρτηση $F(x) = \int_1^{x^3} f(t)dt = \phi(h(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων h και φ στο R, με

$$F'(x) = f(x^3) \cdot 3x^2 = 3x^2 \cdot f(x^3).$$

Ακόμα η συνάρτηση $l(x) = 3 \cdot \left|z + \frac{1}{z}\right| \cdot (x-1)$ είναι παραγωγίσιμη στο R με

$$l'(x) = 3 \cdot \left|z + \frac{1}{z}\right|.$$

Επομένως η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = 3x^2 \cdot |z| \cdot f(x^3) - 3 \cdot \left|z + \frac{1}{z}\right|.$$

β. Αφού $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$ και g(1)=0, η δοσμένη ανισότητα γράφεται: $g(x) \geq g(1)$ για κάθε $x \in R$.

Έτσι όμως η g στο $x_0=1$ παρουσιάζει ελάχιστο και επειδή είναι παραγωγίσιμη σε αυτό συνεπάγεται απο θ. Fermat ότι g′(1)=0.

Όμως $g'(1)= 3 \cdot |z| \cdot f(1) - 3 \cdot \left|z + \frac{1}{z}\right|$ και επειδή f(1)=1 βρίσκουμε ότι $g'(1)= 3 \cdot |z| - 3 \cdot \left|z + \frac{1}{z}\right|$.

Αφού g′(1)=0, έπεται $|z| = \left|z + \frac{1}{z}\right|$.

γ. Επειδή είναι $|z| = \left|z + \frac{1}{z}\right|$, προκύπτει ότι $|z|^2 = \left|z + \frac{1}{z}\right|^2 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = (z + \frac{1}{z}) \cdot (\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}})$

$$\Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = z \cdot \bar{z} + \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{1}{z \cdot \bar{z}} \Leftrightarrow 0 = z^2 + \bar{z}^2 + 1 \Leftrightarrow z^2 + \bar{z}^2 = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2 + \bar{z}^2 = -1 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z^2) = -1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}.$$

δ. Είναι

$z^2 = (a + \beta \cdot i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta \cdot i$ οπότε $\operatorname{Re}(z^2) = a^2 - \beta^2$ και λόγω του ερωτήματος γ έχουμε:

$$a^2 - \beta^2 = -\frac{1}{2} \text{ ή } (\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta) = -\frac{1}{2}.$$

Επειδή α>β προκύπτει ότι

$$\alpha + \beta < 0, \text{ οπότε } \beta < -\alpha < 0.$$

Έτσι για την συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο R άρα και στο [2,3] είναι:

f(2)=α>0 και f(3)=β<0, οπότε f(2)·f(3) <0.

Συνεπώς, εφαρμόζοντας το θεώρημα Bolzano για την f στο διάστημα [2,3], συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΕΤΟΣ 2004

ΘΕΜΑ 1°

Α. Αρκεί να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$

ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.
Πράγματι:

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής , οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε
$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$
Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_2 < x_1$, τότε στο διάστημα $[x_2, x_1]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής , οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε
$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$
Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

Επομένως σε κάθε περίπτωση ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Β.

α	**β**	**γ**	**δ**	**ε**
Λ	Σ	Λ	Σ	Σ

Γ. Μια συνάρτηση f, είναι **συνεχής στο (α, β)** όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β).
Μια συνάρτηση f, είναι **συνεχής στο [α, β]** όταν είναι συνεχής στο (α, β) και ισχύει $\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, ως άθροισμα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων 2^x, m^x, -4^x, -5^x (παραγωγίσιμη μορφή α^x, με $\alpha > 0$) και
$$f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 + m^x \cdot \ln m - 4^x \cdot \ln 4 - 5^x \cdot \ln 5.$$
Αφού $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$, για κάθε $x \in \Re$,

η παραγωγίσιμη στο $\Re$ συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο 0 του πεδίου ορισμού της, άρα από το θεώρημα του Fermat, ισχύει:
$f'(0) = 0 \Leftrightarrow 2^0 \cdot \ln 2 + m^0 \cdot \ln m - 4^0 \cdot \ln 4 - 5^0 \cdot \ln 5 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln 2 + \ln m - \ln 4 - \ln 5 = 0 \Leftrightarrow \ln \frac{2m}{4 \cdot 5} = \ln 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2m}{20}=1 \Leftrightarrow 2m = 20 \Leftrightarrow m = 10.$$

β. Για m = 10, ισχύει $f(x) \geq 0$, το εμβαδό που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 0, x = 1 είναι:

$$E = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 [2^x + 10^x - 4^x - 5^x]dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{10^x}{\ln 10} - \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{5^x}{\ln 5}\right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{2^1}{\ln 2} + \frac{10^1}{\ln 10} - \frac{4^1}{\ln 4} - \frac{5^1}{\ln 5}\right] - \left[\frac{2^0}{\ln 2} + \frac{10^0}{\ln 10} - \frac{4^0}{\ln 4} - \frac{5^0}{\ln 5}\right] =$$

$$= \frac{2}{\ln 2} + \frac{10}{\ln 10} - \frac{4}{\ln 4} - \frac{5}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 10} + \frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 5} =$$

$$= \left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{9}{\ln 10} - \frac{3}{\ln 4} - \frac{4}{\ln 5}\right) \text{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Θέτουμε $z = x + i\cdot y$, με $x, y \in \Re$ και $|x| > |y|$.

Τότε για $z \neq 0 \Leftrightarrow (x, y) \neq (0, 0)$, παίρνουμε:

$$z+\frac{1}{z}=f(\alpha) \Leftrightarrow x+yi+\frac{1}{x+yi}=f(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+yi+\frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}=f(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+yi+\frac{x-yi}{x^2+y^2}=f(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{x}{x^2+y^2}=f(\alpha) & (\mathrm{I}) \\ y-\dfrac{y}{x^2+y^2}=0 & (\mathrm{II}) \end{cases}.$$

Τότε (ΙΙ) $\Leftrightarrow y\left(1-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 0$ ή $1-\dfrac{1}{x^2+y^2}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{Im}z = 0$ (απορρίπτεται) ή $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$.

β. Αφού $z+\dfrac{1}{z}=f(\alpha)$ έχουμε:

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=f^2(\alpha) \Leftrightarrow z^2+\frac{1}{z^2}+2\cdot z\cdot\frac{1}{z}=f^2(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2+\frac{1}{z^2}+2=f^2(\alpha)$$

και αφού $z^2+\dfrac{1}{z^2}=f^2(\beta)$, προκύπτει:

$f^2(\beta)+2=f^2(\alpha)$, οπότε $f^2(\beta)<f^2(\alpha)$.

γ. Θέτουμε $g(x) = x^3\cdot f(\alpha) + f(\beta)$, $x\in[-1, 1]$.

Θεώρημα Bolzano για την g στο $[-1, 1]$

- Η g είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ ως πολυωνυμική
- $g(-1)\cdot g(1)= [-f(\alpha) + f(\beta)]\cdot[f(\alpha) + f(\beta)] =$
  $= f^2(\beta) - f^2(\alpha) < 0$,

οπότε υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της $g(x) = 0$ στο $(-1, 1)$, δηλαδή και της $x^3\cdot f(\alpha) + f(\beta) = 0$ στο $(-1, 1)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Για το $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 2xf(2xt)dt$,

θέτουμε $u = 2xt$, οπότε $du = 2xdt$ και

t	0	$\frac{1}{2}$
u	0	x

άρα $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 2xf(2xt)dt=\int_0^{x} f(u)du$, συνεπώς $f(x)=\frac{x^2}{2}+\int_0^x f(u)du$ **(I)**

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα των παραγωγίσιμων $\frac{x^2}{2}$ (πολυωνυμική) και $\int_0^x f(u)du$ (η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα ορίζεται η $\int_0^x f(u)du$, για $x\geq 0$, οπότε είναι παραγωγίσιμη).

β. Παραγωγίζουμε την (I) και παίρνουμε ότι:

$f'(x)=x+f(x) \Leftrightarrow f'(x)-f(x)=x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-x}\cdot f'(x)-e^{-x}\cdot f(x)=e^{-x}\cdot x \Leftrightarrow [e^{-x}\cdot f(x)]'=e^{-x}\cdot x$,

οπότε

$e^{-x}f(x)=\int e^{-x}xdx \Leftrightarrow e^{-x}f(x)=\int(-e^{-x})'xdx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-x}f(x)=-e^{-x}x-\int(-e^{-x})dx+c_1$, με $c_1\in\Re \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-x}f(x)=-e^{-x}x+(-e^{-x})+c_1+c_2$, με $c_1, c_2\in\Re \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-x}f(x)=-e^{-x}x-e^{-x}+c$, με $c=c_1+c_2\in\Re \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=-x-1+c\cdot e^x$, με $c\in\Re$ **(II)**

Από την (I) για x = 0 έχουμε ότι $f(0)=\frac{0^2}{2}+\int_0^0 f(u)du=0$, ενώ από την (II) προκύπτει:

$f(0)=-0-1+c\cdot e^0 \Leftrightarrow 0=-1+c \Leftrightarrow c=1$.

Επομένως: $f(x)=e^x-(x+1)$.

Επαληθεύω την $f(x)=e^x-(x+1)$ στην αρχική σχέση.

Το δεύτερο μέλος γίνεται:

$$\frac{x^2}{2}+\int_0^{\frac{1}{2}}2xf(2xt)dt=\frac{x^2}{2}+\int_0^{\frac{1}{2}}2x\cdot\left[e^{2xt}-(2xt+1)\right]dt=$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x\cdot\int_0^{\frac{1}{2}}\left(e^{2xt}-2xt-1\right)dt=\frac{x^2}{2}+2x\cdot\left[\frac{e^{2xt}}{2x}-xt^2-t\right]_0^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x\cdot\left(\frac{e^{2x\cdot\frac{1}{2}}}{2x}-x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-\frac{e^{2x\cdot 0}}{2x}+x\cdot 0^2+0\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x\cdot\left(\frac{e^x}{2x}-\frac{x}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2x}\right)=\frac{x^2}{2}+e^x-\frac{2x^2}{4}-x-1=$$

$$=\frac{x^2}{2}+e^x-\frac{2x^2}{4}-x-1=e^x-x-1=f(x).$$

γ. Το x = 0 είναι προφανής ρίζα της f, αφού f(0) = 0.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f'(x)=e^x-1$.

Συνεπώς $f'(x) > 0$ για $x > 0$,

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$,

οπότε η f(x) έχει μία το πολύ ρίζα στο $[0, +\infty)$,

οπότε $x = 0$ είναι μοναδική ρίζα της f(x) στο $[0, +\infty)$.

δ. Θεωρούμε ότι η f είναι ορισμένη στο $\Re$.

- Για $x < 0$, έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}[e^x - (x+1)] = +\infty$,

  αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$.

- Για $x > 0$, έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x \cdot \left(1 - \dfrac{x+1}{e^x}\right)\right] = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

  και $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{e^x} \overset{\text{De L' Hospital}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 2005

ΘΕΜΑ 1

Α.1. Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.
Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$

Α.2. Η ευθεία y = λx + β λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$.

Β.
α → Λ,
β → Λ
γ → Σ
δ → Σ
ε → Λ
στ → Σ

ΘΕΜΑ 2

α. Από τη σχέση $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$ έχουμε:

$$|z_1| = 3 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 9 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 = 9 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}.$$

β. Αρκεί (*) να δειχθεί ότι:

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}\right)} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}.$$

Όμως $\bar{z}_1 = \dfrac{9}{z_1}$, $\bar{z}_2 = \dfrac{9}{z_2}$, $\bar{z}_3 = \dfrac{9}{z_3}$ αφού $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

Άρα $$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{\frac{9}{z_1}}{\frac{9}{z_2}} + \frac{\frac{9}{z_2}}{\frac{9}{z_1}} = \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_1}{z_2}.$$

* Ισχύει ότι $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in IR$
γιατί αν z = α + βi τότε $\bar{z} = \alpha - \beta i$ άρα $z - \bar{z} = 2\beta i \quad (1)$.

Έτσι $z = \bar{z} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \beta = 0 \Leftrightarrow z \in \mathrm{IR}$

γ. α' τρόπος

Είναι:

$$|z_1 + z_2 + z_3| = |\overline{z_1 + z_2 + z_3}| = |\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}| = \left|\frac{9}{z_1} + \frac{9}{z_2} + \frac{9}{z_3}\right| = 9\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = 9\left|\frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 z_2 z_3}\right| =$$

$$= 9\frac{|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|}{|z_1||z_2||z_3|} = 9\frac{|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|}{27} = \frac{1}{3}|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|.$$

β' τρόπος

Είναι:

$$|z_1 + z_2 + z_3|^2 = \frac{1}{9}|z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|^2 \Leftrightarrow$$

$$(z_1 + z_2 + z_3)\overline{(z_1 + z_2 + z_3)} = \frac{1}{9}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)\overline{(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)}$$

$$(z_1 + z_2 + z_3)(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) = \frac{1}{9}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)(\overline{z_1 z_2} + \overline{z_2 z_3} + \overline{z_3 z_1})$$

$$(z_1 + z_2 + z_3)\left(\frac{9}{z_1} + \frac{9}{z_2} + \frac{9}{z_3}\right) = \frac{1}{9}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)\left(\frac{81}{z_1 z_2} + \frac{81}{z_2 z_3} + \frac{81}{z_3 z_1}\right)$$

$$9(z_1 + z_2 + z_3)\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) = \frac{81}{9}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)\left(\frac{1}{z_1 z_2} + \frac{1}{z_2 z_3} + \frac{1}{z_3 z_1}\right)$$

$$\left(1 + \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_1} + 1 + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + 1\right) = \left(1 + \frac{z_1 z_2}{z_2 z_3} + \frac{z_1 z_2}{z_3 z_1} + \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2} + 1 + \frac{z_2 z_3}{z_3 z_1} + \frac{z_3 z_1}{z_1 z_2} + \frac{z_3 z_1}{z_2 z_3} + 1\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_1}{z_2}.$$

Η τελευταία ισχύει προφανώς, άρα και η αρχική.

ΘΕΜΑ 3

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων σ' αυτό, με $f'(x) = (e^{\lambda x})' = e^{\lambda x} \cdot (\lambda x)' = \lambda e^{\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}$.
Είναι $\lambda > 0$, $e^{\lambda x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Έστω $(x_0, f(x_0))$ οι συντεταγμένες του σημείου Μ. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο Μ είναι
(ε): $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - e^{\lambda x_0} = \lambda e^{\lambda x_0}(x - x_0)$.
Για να διέρχεται η (ε) από την αρχή των αξόνων πρέπει και αρκεί:

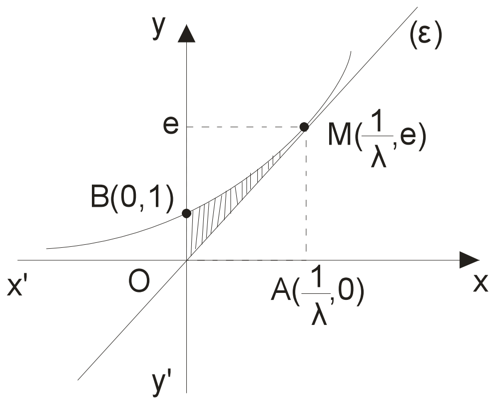
$0 - e^{\lambda x_0} = \lambda e^{\lambda x_0}(0 - x_0) \Leftrightarrow -1 = \lambda(-x_0) \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{1}{\lambda}$.

Έτσι η (ε) γίνεται:

$y - e = \lambda e(x - \dfrac{1}{\lambda}) \Leftrightarrow y = \lambda e x$.

Οι συντεταγμένες του Μ είναι: $M(\dfrac{1}{\lambda}, e)$.

γ.



Το ζητούμενο εμβαδόν όπως φαίνεται από το σχήμα ισούται με:

$$(OAMB) - (OAM) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{\lambda x}dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot e = \left[\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{e}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda}\cdot e - \frac{1}{\lambda} - \frac{e}{2\lambda} = \frac{2e-2-e}{2\lambda} = \frac{e-2}{2\lambda}.$$

δ. Είναι $\dfrac{\lambda^2\cdot E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda} = \dfrac{\lambda^2\cdot\dfrac{e-2}{2\lambda}}{2+\eta\mu\lambda} = \dfrac{(e-2)\lambda}{2(2+\eta\mu\lambda)} = \dfrac{e-2}{2}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda}}$.

Για κάθε $\lambda > 0$ είναι:

$-1 \le \eta\mu\lambda \le 1 \Leftrightarrow 1 \le 2+\eta\mu\lambda \le 3 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{\lambda} \le \dfrac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda} \le \dfrac{3}{\lambda}$.

Όμως $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\dfrac{3}{\lambda}\right) = 0$, οπότε με βάση το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda} = 0$, ενώ $\dfrac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda} > 0$.

Έτσι $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda}} = +\infty$ και αφού $\dfrac{e-2}{2} > 0$ προκύπτει τελικά ότι

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda^2\cdot E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda} = +\infty$.

<u>Παρατήρηση:</u>

Για την εύρεση του εμβαδού του χωρίου Ε (λ) είναι δυνατόν να μη χρησιμοποιηθεί το σχήμα ως εξής:

Για την $f(x) = e^{\lambda x}$ είναι $f'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ και $f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έτσι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ οπότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο της, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής. (Σχόλιο σελ. 274 σχολικού βιβλίου).

Έτσι $f(x) \geq \lambda ex \Leftrightarrow f(x) - \lambda ex \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση

$g(x) = f(x) - \lambda ex$ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $\left[0, \frac{1}{\lambda}\right]$

οπότε το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με:

$$E(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (f(x) - \lambda ex)dx = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (e^{\lambda x} - \lambda ex)dx = \left[\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} - \frac{\lambda ex^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}} = \ldots = \frac{e-2}{2\lambda}.$$

ΘΕΜΑ 4

α. Από τη δοσμένη σχέση $2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$2f'(x) = \frac{e^x}{e^{f(x)}} \quad ή$$

$$2f'(x)e^{f(x)} = e^x \quad ή$$

$$f'(x)e^{f(x)} = \frac{1}{2}e^x \quad ή$$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = \frac{1}{2}e^x \quad ή$$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = \left(\frac{e^x}{2}\right)' \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + C, \; C \in \mathbb{R}.$$

Για $x = 0$ έχουμε: $e^{f(0)} = \frac{e^0}{2} + C$

η οποία λόγω του ότι $f(0) = 0$ γράφεται:

$$e^0 = \frac{e^0}{2} + C \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}.$$

Οπότε: $e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{e^x + 1}{2}$.

Άρα: $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{2}\right)$.

β. Θέτουμε $x - t = u$.

Διαφορίζουμε την τελευταία και βρίσκουμε $du = -dt$.

Επιπλέον για $t = 0$ είναι $u = x$, ενώ για $t = x$ είναι $u = 0$.

Έτσι:

$$\int_0^x f(x-t)dt = -\int_x^0 f(u)du = \int_0^x f(u)du$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x-t)dt}{ημx}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{ημx}.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η $\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\left(\int_0^x f(u)du\right)'=f(x)$.

Επειδή η $\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα είναι και συνεχής σ' αυτό.

Επομένως: $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{ημx}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x f(u)du\right)'}{(ημx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{συνx}=\frac{f(0)}{συν0}=f(0)=0$.

(Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής σ' αυτό.)

γ. Είναι

$$h(x)=\int_{-x}^{x}t^{2005}f(t)dt=\int_{-x}^{0}t^{2005}f(t)dt+\int_{0}^{x}t^{2005}f(t)dt=\int_{0}^{x}t^{2005}f(t)dt-\int_{0}^{-x}t^{2005}f(t)dt.$$

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $φ(t)=t^{2005}\cdot f(t)$ η $h(x)$ γράφεται:

$$h(x)=\int_0^x φ(t)dt-\int_0^{-x}φ(t)dt.$$

Η $φ(t)=t^{2005}\cdot f(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η συνάρτηση $κ(x)=\int_0^x φ(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $κ'(x)=φ(x)=x^{2005}\cdot f(x)$, όπως επίσης είναι παραγωγίσιμη και η συνάρτηση $κ(-x)=\int_0^{-x}φ(t)dt$ ως σύνθεση των παραγωγισίμων $-x$, $κ(x)$, με $(κ(-x))'=φ(-x)(-x)'=-φ(-x)$.

Επομένως

$$h'(x)=(κ(x)-κ(-x))'=φ(x)+φ(-x)=x^{2005}f(x)+(-x)^{2005}f(-x)=$$

$$=x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)-x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right)=x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{\frac{1+e^x}{2}}{\frac{1+e^{-x}}{2}}\right)=x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{-x}}\right)=$$

$$=x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{1+e^x}{1+\frac{1}{e^x}}\right)=x^{2005}\cdot\ln\left[\frac{e^x(1+e^x)}{(e^x+1)}\right]=x^{2005}\cdot\ln e^x=x^{2005}\cdot x=x^{2006}.$$

Ακόμα η $g(x)=\frac{x^{2007}}{2007}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=2007\cdot\frac{x^{2006}}{2007}=x^{2006}$.

Επειδή $h'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $h(x)=g(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

Όμως για $x=0$ είναι $h(0)=g(0)=0$, άρα $c=0$.

Επομένως $h(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ. Η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005} f(t)dt = \dfrac{1}{2008}$ λόγω του ερωτήματος γ γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{x^{2007}}{2007} = \frac{1}{2008} \Leftrightarrow 2008x^{2007} - 2007 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$P(x) = 2008x^{2007} - 2007$, x $\in$ [0, 1].

Η P είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο [0, 1] ως πολυωνυμική.

$P(0) = -2007 < 0$ κ' $P(1) = 1 > 0$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $P(x_0) = 0$.

Επιπλέον η $P(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, άρα και στο [0, 1] με $P'(x) = 2008 \cdot 2007x^{2006}$.

Είναι $P'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ οπότε η P είναι γνησίως αύξουσα στο (0, 1).

Άρα η $P(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο (0, 1).

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΕΤΟΣ 2005

ΘΕΜΑ 1°

Α1. Έστω $x_0 \in (0, +\infty)$ και για κάθε $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{x}^2-\sqrt{x_0}^2}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)} = \frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε για κάθε x κοντά στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Α2. Μια συνάρτηση $f: A \to \Re$ λέγεται **«1 – 1»** όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Β.

α	β	γ	δ	ε	στ
Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Έστω $z_1 = x_1 + i\cdot y_1$, $z_2 = x_2 + i\cdot y_2$, με $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \Re$.

Τότε:

$$\begin{cases} z_1+z_2 = 4+4i \\ 2z_1-\overline{z_2} = 5+5i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+iy_1+x_2+iy_2 = 4+4i \\ 2x_1+2iy_1-x_2+iy_2 = 5+5i \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=4 \\ 2x_1-x_2=5 \\ y_1+y_2=4 \\ 2y_1+y_2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=4 \\ 2x_1-x_2+x_1+x_2=5+4 \\ y_1+y_2=4 \\ 2y_1+y_2-y_1-y_2=5-4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2=4-x_1 \\ 3x_1=9 \\ y_2=4-y_1 \\ y_1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=1 \\ x_1=3 \\ y_2=3 \\ y_1=1 \end{cases}.$$

Συνεπώς: $z_1 = 3+i$, $z_2 = 1+3i$.

β. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z, w στο μιγαδικό επίπεδο είναι οι κυκλικοί δίσκοι (K_1, R_1), (K_2, R_2) με $K_1(1, 3)$, $R_1 = \sqrt{2}$, $K_2(3, 1)$, $R_2 = \sqrt{2}$.

i. Τότε:

$(K_1K_2)=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}=R_1+R_2$,

δηλαδή, οι κυκλικοί δίσκοι εφάπτονται εξωτερικά, άρα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, οπότε υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί z, w έτσι ώστε z = w.

ii. *1ος τρόπος*

Η μέγιστη τιμή του $|z-w|$ είναι ίση με τη μέγιστη απόσταση των σημείων Α και Β που ανήκουν αντίστοιχα στους δύο κύκλους (K_1, R_1), (K_2, R_2). Αφού οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά η μέγιστη τιμή του $|z-w|$ είναι ίση με

$2R_1+2R_2=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

2ος τρόπος

Αφού $|z-w|=|z-1-3i+1+3i-w+3+i-3-i| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z-w|=|(z-1-3i)-(w-3-i)-2+2i|$.

Όμως:

$|z-w|\le|(z-1-3i)|+|-(w-3-i)|+|-2+2i|\le$

$\le\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{2}+\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Έστω $x_1 \neq x_2$.

Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού για την f στο $[x_1, x_2]$ (αν $x_1 < x_2$) ή στο $[x_2, x_1]$ (αν $x_1 > x_2$)

- Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]\subseteq\Re$ ή στο $[x_2, x_1]\subseteq\Re$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(x_1, x_2)\subseteq\Re$ ή $(x_2, x_1)\subseteq\Re$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$,

άρα υπάρχει $\xi\in(x_1, x_2)$ ή $\xi\in(x_2, x_1)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ **(Ι)**

Όμως από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $f'(x)\neq 0$,
άρα από την (Ι) παίρνουμε $f(x_1)\neq f(x_2)$,
οπότε η συνάρτηση f είναι «1 – 1».

β. $A(1, 2.005)\in C_f \Leftrightarrow f(1)=2.005 \Leftrightarrow f^{-1}(2.005)=1$.

$B(-2, 1)\in C_f \Leftrightarrow f(-2)=1 \Leftrightarrow f^{-1}(1)=-2$.

Τότε:

$f^{-1}(-2.004+f(x^2-8))=-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(f^{-1}(-2.004+f(x^2-8)))=f(-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2.004+f(x^2-8)=1 \Leftrightarrow f(x^2-8)=2.005 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x^2-8)=f(1)$

και αφού η f είναι «1 – 1», προκύπτει

$x^2-8=1 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$.

γ. Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού
για την f στο $[-2, 1]$

- Η f είναι συνεχής στο $[-2, 1]\subseteq\Re$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-2, 1)\subseteq\Re$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$,

άρα υπάρχει $\xi\in(-2,\ 1)$ έτσι ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)} \Leftrightarrow$

$f'(\xi)=\dfrac{2.005-1}{3}=\dfrac{2.004}{3}=668$.

Επομένως η εφαπτομένη της f στο σημείο (ξ, f(ξ)) έχει κλίση $f'(\xi)=668$, ενώ η (ε) έχει κλίση $\lambda_\varepsilon=-\dfrac{1}{668}$,

οπότε είναι κάθετες μεταξύ τους,

αφού $f'(\xi)\cdot\lambda_\varepsilon=668\cdot\left(-\dfrac{1}{668}\right)=-1$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. i. Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)-x}{x^2} \Leftrightarrow f(x)=x^2\cdot g(x)+x$, για $x\neq 0$.

Τότε για x κοντά στο 0, έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2\cdot g(x)+x\right]=0$

και αφού η f είναι συνεχής στο $\Re$, άρα και στο 0,

οπότε ισχύει: $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

ii. Για x κοντά στο 0, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot g(x)+x-0}{x}=\lim_{x\to 0}[x\cdot g(x)+1]=1,$$

οπότε $f'(0)=1$.

β. Για x κοντά στο 0, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\lambda\cdot f^2(x)}{2x^2+f^2(x)}=3 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\left(1+\lambda\cdot\dfrac{f^2(x)}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(2+\dfrac{f^2(x)}{x^2}\right)}=3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1+\lambda\cdot\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2}{2+\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2}=3 \Leftrightarrow \frac{1+\lambda\cdot 1^2}{2+1^2}=3 \Leftrightarrow \frac{1+\lambda}{3}=3 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 1+\lambda=9 \Leftrightarrow \lambda=8$,

αφού από το α.ii. ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$.

γ. i. Θέτουμε $g(x)=e^{-x}\cdot f(x)$, όπου $x\in\Re$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ ως γινόμενο των παραγωγίσιμων e^{-x} [σύνθεση των παραγωγίσιμων e^x (εκθετική) και $-x$ (πολυωνυνική)] και f(x) με:

$g'(x)=e^{-x}\cdot f'(x)-e^{-x}\cdot f(x)=e^{-x}\cdot[f'(x)-f(x)]>0$,

οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

Επομένως:

$x>0$	$x<0$
$g(x)>g(0)$	$g(x)<g(0)$
$e^{-x}f(x)>0$	$e^{-x}f(x)<0$

$f(x) > 0$	$f(x) < 0$
$x \cdot f(x) > 0$	$x \cdot f(x) > 0$

Συνεπώς $x \cdot f(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

ii. Αποδεικνύουμε πρώτα την πρόταση:

Αν οι h, g είναι συνεχείς στο [α, β] και ισχύει

$h(x) > g(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, τότε: $\int_\alpha^\beta h(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$.

Απόδειξη

Έστω $k(x) = h(x) - g(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$.

Τότε $k(x) > 0$, $x \in [\alpha, \beta]$, οπότε:

$$\int_\alpha^\beta k(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta [h(x) - g(x)]dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_\alpha^\beta h(x)dx - \int_\alpha^\beta g(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta h(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx .$$

Με βάση την παραπάνω πρόταση και αφού $f'(x) > f(x)$, ισχύει:

$$\int_0^1 f'(x)dx > \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow [f(x)]_0^1 > \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(1) - f(0) > \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow f(1) > \int_0^1 f(x)dx .$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 2006

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Θεωρία. Σχολ. βιβλίο σελ. 253
Α.2 Ορισμός. Σχολ. βιβλίο σελ. 273
Β. α $\to$ Λ
β $\to$ Σ
γ $\to$ Σ
δ $\to$ Λ
ε $\to$ Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. $f(x) = 2 + (x-2)^2, \quad x \geq 2$
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[2,+\infty)$ με $f'(x) = 2(x-2) > 0$ για κάθε $x \in (2,+\infty)$.
Άρα f γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$ και επομένως είναι και
1-1.

β. Αφού η f είναι 1-1 υπάρχει η f^{-1} αντίστροφη συνάρτηση της f με
$f^{-1} : f(A) \to R$.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο Α = $[2,+\infty)$ έπεται ότι
$f(A) = \left[f(2), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = [2,+\infty)$

Τώρα αν $y = f(x) \Leftrightarrow y = 2 + (x-2)^2 \Leftrightarrow y - 2 = (x-2)^2$.

Επειδή $x - 2 \geq 0$, $y - 2 \geq 0$, έχουμε $x - 2 = \sqrt{y-2}, \quad x \in [2,+\infty), \quad y \in [2,+\infty)$

ή $x = 2 + \sqrt{y-2}, \quad x \in [2,+\infty), \quad y \in [2,+\infty)$

ή $f^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y-2}, \quad y \in [2,+\infty)$.

Τελικά $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-2}, \quad x \in [2,+\infty)$.

γ. i) Έχουμε

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2 + (x-2)^2 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + (x-2)^2 = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = x - 2 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x = 2 \\ y = 2 \end{pmatrix} \quad ή \quad \begin{pmatrix} x = 3 \\ y = 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 + \sqrt{x-2} \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2 + \sqrt{x-2} \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \sqrt{x-2} = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = x - 2 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = (x-1)^2 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x = 2 \\ y = 2 \end{pmatrix} ή \begin{pmatrix} x = 3 \\ y = 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f και f^{-1} με την y = x είναι τα A(2,2), B(3,3).

ii)
Οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι συνεχείς άρα και η διαφορά τους είναι συνεχής.

$f(x) - f^{-1}(x) = [2 + (x-2)^2] - [2 + \sqrt{x-2}] = (x-2)^2 - \sqrt{x-2} = \sqrt{x-2} \cdot \left(\sqrt{x-2}^{\,3} - 1 \right)$ Προκύπτει $f(x) - f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 0 \quad ή \quad \left(\sqrt{x-2}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \quad ή \quad x = 3$.
Δηλαδή τα κοινά τους σημεία είναι τα A(2,2), B(3,3).

Επειδή $2 \le x \le 3 \Leftrightarrow 0 \le x - 2 \le 1 \Leftrightarrow$
$\sqrt{x-2} \le 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}^{\,3} \le 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}\right)^3 - 1 \le 0$.

Επίσης είναι $\sqrt{x-2} \ge 0$ για $x \in [2,3]$.

Άρα $f(x) - f^{-1}(x) \le 0$ για $x \in [2,3]$.

Οπότε το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου είναι

$$E = \int_2^3 \left(f^{-1}(x) - f(x)\right)dx = \int_2^3 \left(\sqrt{x-2} - (x-2)^2\right)dx = \frac{1}{3} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α.i Από τη σχέση $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ έχουμε ισοδύναμα $z_1 = -z_2 - z_3$ (1).
Θα δείξουμε ότι $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1|$ (2).
Πράγματι η (2) λόγω της (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$|-z_2 - z_3 - z_2| = |z_3 + z_2 + z_3| \Leftrightarrow$$
$$|2z_2 + z_3| = |2z_3 + z_2| \Leftrightarrow$$
$$|2z_2 + z_3|^2 = |2z_3 + z_2|^2 \Leftrightarrow$$
$$(2z_2 + z_3)(\overline{2z_2 + z_3}) = (2z_3 + z_2)(\overline{2z_3 + z_2}) \Leftrightarrow$$
$$(2z_2 + z_3)(2\overline{z}_2 + \overline{z}_3) = (2z_3 + z_2)(2\overline{z}_3 + \overline{z}_2) \Leftrightarrow$$
$$4z_2\overline{z}_2 + 2z_2\overline{z}_3 + 2z_3\overline{z}_2 + z_3\overline{z}_3 = 4z_3\overline{z}_3 + 2z_3\overline{z}_2 + 2z_2\overline{z}_3 + z_2\overline{z}_2 \Leftrightarrow$$
$$3z_2\overline{z}_2 = 3z_3\overline{z}_3 \Leftrightarrow$$
$$z_2\overline{z}_2 = z_3\overline{z}_3 \Leftrightarrow$$
$$|z_2|^2 = |z_3|^2 \Leftrightarrow$$
$$|z_2| = |z_3|.$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής λόγω της υπόθεσης, άρα και η (2).
Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι $|z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$ (3).
Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$.
Άρα $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

α.ii Είναι:
$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \le |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2| = 1 + 1 + = 2$
Άρα $|z_1 - z_2| \le 2$.
Οπότε $|z_1 - z_2|^2 \le 4$.
Τότε:

$$|z_1 - z_2|^2 \le 4 \Leftrightarrow$$
$$(z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \le 4 \Leftrightarrow$$
$$(z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) \le 4 \Leftrightarrow$$
$$z_1\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 \le 4 \Leftrightarrow$$
$$|z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2) \le 4 \Leftrightarrow$$
$$1 + 1 - (z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2) \le 4 \Leftrightarrow$$
$$z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 \cdot z_2 \ge -2 \Leftrightarrow$$
$$z_1\overline{z}_2 + \overline{z_1\overline{z}_2} \ge -2 \Leftrightarrow$$
$$2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) \ge -2 \Leftrightarrow$$
$$\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) \ge -1.$$

β. Επειδή $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ προκύπτει ότι οι εικόνες των μιγαδικών $\mathrm{A}(z_1), \mathrm{B}(z_2), \Gamma(z_3)$ βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο Ο (0, 0) και ακτίνα

ρ = 1. Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο παραπάνω κύκλος.
Λόγω τώρα της σχέσης $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$ προκύπτει ότι οι κορυφές $\mathrm{A}(z_1), \mathrm{B}(z_2), \Gamma(z_3)$ αποτελούν κορυφές ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Πρέπει x > 0 και $x \neq 1$. Άρα $A_f = (0,1) \cup (1,+\infty)$.
Η f είναι παραγωγίσιμη στο A_f ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με
$f'(x) = -\left[\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x}\right] < 0$ για κάθε $x \in A_f$.
Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα
(0, 1) και (1, +∞).
Επειδή τώρα $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ και η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο (0, 1) είναι $f((0,1)) = \mathfrak{R}$.
Επίσης επειδή $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ και η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο (1, +∞), είναι $f((1,+\infty)) = \mathfrak{R}$.
Έτσι συνολικά το σύνολο τιμών της f είναι $f((0,1) \cup (1,+\infty)) = \mathfrak{R}$.

β. Επειδή $f((0,1)) = \mathfrak{R}$ έπεται $O \in f((0,1))$ δηλαδή υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ ωστε $f(x_1) = 0$.
Η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο (0,1), αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα και άρα 1-1.
Ομοίως επειδή $f((1,+\infty)) = \mathfrak{R}$ έπεται $O \in f((1+\infty))$ δηλαδή υπάρχει $x_2 \in (1,+\infty)$ ώστε $f(x_2) = 0$.
Η ρίζα αυτή είναι επίσης μοναδική στο (1,+ ∞), αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα και άρα 1-1.
Έτσι η f έχει ακριβώς 2 ρίζες.

γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $g(x) = \ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln\alpha)$, α>0 είναι:
$y = \frac{1}{\alpha}x - 1 + \ln a$ (ε_1)
Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$, $\beta \in \mathfrak{R}$ είναι:
$y = e^\beta x + e^\beta - \beta e^\beta$ (ε_2).
Οι (ε_1), (ε_2) ταυτίζονται αν και μόνο αν
$\frac{1}{\alpha} = e^\beta \Leftrightarrow \beta = -\ln\alpha$ (1) και $\ln\alpha - 1 = e^\beta - \beta \cdot e^\beta$ (2)
Τότε η (2) γράφεται:

$\ln\alpha - 1 = \frac{1}{\alpha} + \ln\alpha \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow$

$\alpha\ln\alpha - \alpha = 1 + \ln\alpha \Leftrightarrow$

$-\alpha - 1 = (\ln\alpha)(1-\alpha) \Leftrightarrow$

$\frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \ln\alpha \Leftrightarrow$

$\frac{\alpha+1}{\alpha-1} - \ln\alpha = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$.

δ.

Από το 4γ προκύπτει ότι οι γραφικές παραστάσεις των g(x), h(x) έχουν κοινή εφαπτόμενη στα σημεία τους Α(α, lnα) και Β(β, e^{β}) αντίστοιχα αν και μόνον αν:

$$\begin{pmatrix} \beta = -\ln\alpha \\ f(\alpha) = 0 \end{pmatrix}$$

Επειδή η f(x) = 0 έχει δύο διακεκριμένες ρίζες $\alpha_1 \in (0,1)$ και $\alpha_2 \in (1,+\infty)$ προκύπτουν δύο εφαπτόμενες οι

$(\varepsilon_1): y = \frac{1}{\alpha_1}x - 1 + \ln\alpha_1$

$(\varepsilon_2): y = \frac{1}{\alpha_2}x - 1 + \ln\alpha_2$.

Οι εφαπτόμενες αυτές είναι ακριβώς δύο (διακεκριμένες) αφού έχουν δύο διακεκριμένους συντελεστές διεύθυνσης $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}$ αντίστοιχα.

$\left(\frac{1}{\alpha_1} \in (1,+\infty), \frac{1}{\alpha_2} \in (0,1)\right)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΕΤΟΣ 2006

ΘΕΜΑ 1°

Α1. Έστω $f(x) = συνx$, όπου $x \in \Re$.

Τότε για κάθε $x \in \Re$ και $h \neq 0$, ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{συν(x+h)-συνx}{h} =$$

$$= \frac{συνx \cdot συνh - ημx \cdot ημh - συνx}{h} = \frac{συνx \cdot (συνh-1) - ημx \cdot ημh}{h} =$$

$$= συνx \cdot \frac{συνh-1}{h} - ημx \cdot \frac{ημh}{h},$$

οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(συνx \cdot \frac{συνh-1}{h} - ημx \cdot \frac{ημh}{h}\right) =$$

$$= συνx \cdot \lim_{h\to 0}\frac{συνh-1}{h} - ημx \cdot \lim_{h\to 0}\frac{ημh}{h} = συνx \cdot 0 - ημx \cdot 1 = -ημx$$ Επομένως

$(συνx)' = -ημx$, για κάθε $x \in \Re$.

Α2. Αρχική συνάρτηση ή **παράγουσα της συνάρτησης f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in Δ$.

Β.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Λ	Σ	Σ	Λ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ ως πηλίκο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $1 + e^x$ [άθροισμα των συνεχών 1 (σταθερή) και e^x (εκθετική)] με την , με $1 + e^{x+1}$ [άθροισμα των συνεχών 1 (σταθερή) και e^{x+1} (σύνθεση των συνεχών e^x και $x + 1$)], με

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^{x+1}) - (1+e^x)\cdot e^{x+1}}{(1+e^{x+1})^2} =$$

$$= \frac{e^x + e^x \cdot e^{x+1} - e^{x+1} - e^x \cdot e^{x+1}}{(1+e^{x+1})^2} = \frac{e^x - e^{x+1}}{(1+e^{x+1})^2}$$

Όμως
$x < x + 1 \Leftrightarrow e^x < e^{x+1}$ και αφού $(1 + e^{x+1})^2 > 0$,
ισχύει $f'(x) < 0$,
δηλαδή, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.

β. Για τον υπολογισμό του $\int \frac{1}{f(x)}dx$ θέτουμε $u = e^x$,

οπότε $du = e^x \cdot dx \;\Leftrightarrow\; dx = \frac{du}{u}$ και έχουμε:

$$\int \frac{1}{f(x)}dx = \int \frac{1+e^{x+1}}{1+e^x}dx = \int \frac{1+e\cdot u}{1+u}\cdot\frac{du}{u} = \int \frac{1+e\cdot u}{u(1+u)}\cdot du \ \textbf{(I)}$$

Αναζητούμε Α, Β $\in\Re$ ώστε:

$$\frac{1+e\cdot u}{u(1+u)} = \frac{A}{u}+\frac{B}{1+u} = \frac{A(1+u)+Bu}{u(1+u)} = \frac{A+u(A+B)}{u(1+u)},$$

άρα

$$\begin{cases} A=1 \\ A+B=e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=e-1 \end{cases}$$

και η (Ι) δίνει:

$$\int \frac{1}{f(x)}dx = \int\left(\frac{1}{u}+\frac{e-1}{u+1}\right)\cdot du \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{f(x)}dx = \ln|u| + (e-1)\cdot\ln|u+1| + c,\ \text{όπου } c\in\Re.$$

γ. Για $x < 0$ και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε:

- $5^x > 6^x$, άρα $f(5^x) < f(6^x)$ **(ΙΙ)**
- $7^x > 8^x$, άρα $f(7^x) < f(8^x)$ **(ΙΙΙ)**

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (ΙΙ) και (ΙΙΙ) βρίσκουμε ότι:
$f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x)$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Αφού $(4-z)^{10}=z^{10}$ ισχύει:

$$\left|(4-z)^{10}\right|=\left|z^{10}\right| \Leftrightarrow |4-z|^{10}=|z|^{10} \Leftrightarrow |4-z|=|z| \ \textbf{(I)}$$

Θέτουμε z = x + i·y, όπου x, y∈ℜ, οπότε η (Ι) γίνεται:

$$|4-x-i\cdot y|=|x+i\cdot y| \Leftrightarrow \sqrt{(4-x)^2+(-y)^2}=\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4-x)^2+(-y)^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow 16-8x+x^2+y^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow 16-8x=0 \Leftrightarrow$$

$$16-8x=0 \Leftrightarrow 16=8x \Leftrightarrow x=2.$$

Επομένως οι εικόνες του μιγαδικού z πάνω στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στην ευθεία x = 2.

β. i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο ℜ ως πολυωνυμική,
με $f'(x) = 2x + 1$.
Επίσης:
$f(2) = 2^2 + 2 + α = 6 + α$ και $f'(2) = 2·2 + 1 = 5$.
Η εφαπτομένη στο (2, f(2)) είναι:
$y – f(2) = f'(2)·(x – 2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y – (6 + α) = 5·(x – 2) \Leftrightarrow y – 6 – α = 5x – 10 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = 5x + 6 + α – 10 \Leftrightarrow y = 5x + α – 4$ **(ΙΙ)**
Αφού το (0, –3) είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον y΄y, ισχύει:
$–3 = 5·0 – 4 + α \Leftrightarrow –3 = – 4 + α \Leftrightarrow α = 1$,
άρα η εφαπτομένη είναι:
$y = 5x + 1 – 4 \Leftrightarrow y = 5x – 3$.

ii. Ισχύει ότι $f'(x) = 2x + 1$ και $f''(x) = 2 > 0$, οπότε η f είναι κυρτή, άρα $f(x) \geq 5x – 3$. Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E=\int_{\frac{3}{5}}^{2}[f(x)-(5x-3)]dx=\int_{\frac{3}{5}}^{2}(x^2+x+1-5x+3)dx=$$

$$=\int_{\frac{3}{5}}^{2}(x^2-4x+4)dx=\left[\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{x^2}{2}+4x\right]_{\frac{3}{5}}^{2}=$$

$$=\frac{2^3}{3}-2\cdot2^2+4\cdot2-\left[\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^3}{3}-2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2+4\cdot\frac{3}{5}\right]=$$

$$=\frac{8}{3}-8+8-\left[\frac{27}{375}-2\cdot\frac{9}{25}+4\cdot\frac{3}{5}\right]=\frac{8}{3}-\frac{27}{375}+\frac{18}{25}-\frac{12}{5}=$$

$$=\frac{1.000}{375}-\frac{27}{375}+\frac{270}{375}-\frac{900}{375}=\frac{343}{375}\ \text{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4ο

α. i. Έστω $g(x)=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x}$, x∈(0, +∞).

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞), ως άθροισμα των παραγωγίσιμων ln(x + 1) [ως σύνθεση των παραγωγίσιμων x + 1 (πολυωνυμική), lnx (λογαριθμική)], lnx (ως λογαριθμική), $\frac{1}{x}$ (ως ρητή),

με $g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-x(x+1)+x+1}{x^2(x+1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ g'(x)=\frac{x^2-x^2-x+x+1}{x^2(x+1)}=\frac{1}{x^2(x+1)}$.

Όμως g΄(x) > 0 για x > 0,

οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο (0, +∞),

άρα $g(A)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} g(x), \lim\limits_{x\to +\infty} g(x)\right)$.

Επίσης:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}\right)=$

  $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right]=0$,

  αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x}\right]=-\infty$,

  αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\cdot\ln x+1}{x}=+\infty$

  και $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=$

  $\overset{\text{De L' Hospital}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$.

Επομένως g(A) = (–∞, 0),

άρα g(x) < 0 ⇔ $\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$.

ii. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞),

ως άθροισμα των παραγωγίσιμων x·ln(x + 1) [ως γινόμενο των παραγωγίσιμων x (πολυωνυμική), ln(x + 1) (ως σύνθεση συνεχών), (x + 1)·lnx [ως γινόμενο των παραγωγίσιμων x + 1 (πολυωνυμική), lnx (ως λογαριθμική)], με

$f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}-\ln x-\frac{x+1}{x}=$

$=\ln(x+1)-\ln x+\frac{x}{x+1}-\frac{x}{x}-\frac{1}{x}=\ln(x+1)-\ln x+\frac{x}{x+1}-1-\frac{1}{x}=$

$=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x}+\frac{x-x-1}{x+1}=g(x)-\frac{1}{x+1}$.

Όμως για x > 0 ισχύει f΄(x) < 0,

αφού $g(x) < 0$ και $-\dfrac{1}{x+1} < 0$,

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

β. Για $x > 0$, έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{De L' Hospital}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) = 1.$$

γ. Για $\alpha\in(0, +\infty)$, έχουμε:

$$(\alpha+1)^{\alpha} = \alpha^{\alpha+1} \Leftrightarrow \ln(\alpha+1)^{\alpha} = \ln\alpha^{\alpha+1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha\cdot\ln(\alpha+1) = (\alpha+1)\cdot\ln\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha\cdot\ln(\alpha+1) - (\alpha+1)\cdot\ln\alpha = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0.$$

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, άρα έχει μία το πολύ ρίζα στο $(0, +\infty)$.
- $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to0^+} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$, αφού

  $$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left[x\cdot\ln(x+1) - (x+1)\ln x\right] = +\infty \text{ και}$$
  $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\ln(x+1) - (x+1)\ln x\right] =$$
  $$= \lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\ln(x+1) - x\cdot\ln x - \ln x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\ln\frac{x+1}{x} - \ln x\right] =$$
  $$= \lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \ln x\right] \overset{(\beta)}{=\!=\!=} -\infty.$$

Συνεπώς $0\in f(A)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε υπάρχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 2007

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Θεωρία, σελίδα 98 σχολ. βιβλίου.
Α.2 Θεωρία - Ορισμός, σελίδα 141 σχολ. βιβλίου.
Α.3 Θεωρία - Ορισμός, σελίδα 280 σχολ. βιβλίου.

Β. **α.** → Λ **β.** → Λ **γ.** → Λ **δ.** → Σ **ε.** → Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α.

$z = \dfrac{2+\alpha i}{\alpha + 2i}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Άρα $|z| = \left|\dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i}\right| = \dfrac{|2+\alpha i|}{|\alpha+2i|} = \dfrac{\sqrt{4+\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+4}} = 1$.

Άρα η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα $\rho = 1$.

β.

Για $\alpha = 0$ έχουμε: $z_1 = \dfrac{2+0i}{0+2i} = \dfrac{1}{i} = -i = 0 - i$.

Για $\alpha = 2$ έχουμε: $z_2 = \dfrac{2+2i}{2+2i} = 1 = 1 + 0i$.

i. Αν Α, Β οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, τότε η απόστασή τους είναι
d(Α, Β) = $|z_1 - z_2| = |(0 - i) - (1 + 0\,i)| = |-1 - i| = |1 + i| = \sqrt{2}$.

ii. Είναι: $(z_1)^{2\nu} = \left((z_1)^2\right)^{\nu} = ((-i)^2)^{\nu} = (-1)^{\nu} = (-z_2)^{\nu}$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.
Οπότε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		+	0	-	0	+	
f		↗		↘		↗	

Από τον πίνακα μεταβολών της f προκύπτει ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -1$, το $f(-1) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$ και έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 1$, το $f(1) = -2(1 + \eta\mu^2\theta)$.

Επίσης είναι: $f''(x) = 6x$.

Οπότε $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$		$\cup$

Προκύπτει ότι η f έχει σημείο καμπής στο $x_3 = 0$, το $f(x_3) = -2ημ^2θ$.

β.

i. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $f(-1) = 2συν^2θ > 0$ και f γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty, -1]$, προκύπτει: $f\big((-\infty, -1]\big) = (-\infty, 2συν^2θ]$

Επειδή $0 \in f\big((-\infty, -1]\big)$, υπάρχει $ρ_1 \in (-\infty, -1)$ ώστε $f(ρ_1) = 0$. Η ρίζα $ρ_1$ είναι και μοναδική στο $(-\infty, -1]$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

ii. Επειδή $f(-1) = 2συν^2θ > 0$, $f(1) = -2(1 + ημ^2θ) < 0$ και f γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[-1, 1]$ προκύπτει: $f\big([-1, 1]\big) = \big[-2(1 + ημ^2θ), 2συν^2θ\big]$.

Επειδή $0 \in f\big([-1, 1]\big)$, υπάρχει $ρ_2 \in (-1, 1)$ ώστε $f(ρ_2) = 0$. Η ρίζα $ρ_2$ είναι και μοναδική στο $[-1, 1]$, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

iii. Επειδή $f(1) = -2(1 + ημ^2θ) < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[1, +\infty)$ προκύπτει: $f\big([1, +\infty)\big) = \big[-2(1 + ημ^2θ), +\infty\big)$.

Επειδή $0 \in f\big([1, +\infty)\big)$, υπάρχει $ρ_3 \in (1, +\infty)$ ώστε $f(ρ_3) = 0$. Η ρίζα $ρ_3$ είναι και αυτή μοναδική στο $[1, +\infty)$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 3 ρίζες στο $\mathbb{R}$.

γ. Έχουμε

$Α\big(-1, 2συν^2θ)\big)$, $Β\big(1, -2(1 + ημ^2θ)\big)$, $Γ(0, -2ημ^2θ)$

$Α \in (ε)$ αφού:

$2συν^2θ = -2(-1) - 2ημ^2θ \Leftrightarrow 2(1 - ημ^2θ) = 2 - 2ημ^2θ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 - 2ημ^2θ = 2 - 2ημ^2θ$.

$Β \in (ε)$ αφού:

$-2(1 + ημ^2θ) = (-2) \cdot 1 - 2ημ^2θ$ ή $-2 - 2ημ^2θ = -2 - 2ημ^2θ$.

$\Gamma \in (\varepsilon)$ αφού:
$-2\eta\mu^2\theta = 2 \cdot 0 - 2\eta\mu^2\theta$ ή $-2\eta\mu^2\theta = -2\eta\mu^2\theta$.

δ. Βρίσκουμε τα κοινά σημεία των C_f, ε:
$f(x) = y \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta = -2x - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$
$x(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = -1$.

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν Ε του χωρίου είναι:

$$E = \int_{-1}^{1} |f(x) - y|\,dx = \int_{-1}^{1} |x^3 - x|\,dx \overset{(*)}{=}$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx - \int_{0}^{1} (x^3 - x)\,dx = \frac{1}{2}\ \tau.\mu.$$

(*) $x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$.
$x^3 - x > 0$ για $x \in (-1, 0)$.
$x^3 - x < 0$ για $x \in (0, 1)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Αφού f, g συνεχείς στο [0, 1] η F είναι παραγωγίσιμη στο [0, 1] με $F'(x) = f(x)g(x)$.
Όμως $g(x) > 0$ στο [0, 1] από υπόθεση, ενώ αφού f γνησίως αύξουσα στο [0, 1] έχουμε: $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) > 0$, άρα $f(x) > 0$ στο [0, 1].
Συνεπώς $f(x) \cdot g(x) > 0$ στο [0, 1] και επομένως $F'(x) > 0$ στο [0, 1].
Οπότε F γνησίως αύξουσα στο [0, 1].

Έτσι για $x \in (0, 1]$ είναι $x > 0 \Rightarrow F(x) > F(0) \Rightarrow F(x) > \int_0^0 f(t)g(t)dt \Rightarrow F(x) > 0$.

β. Είναι: $0 \leq t \leq x$ με $x \in (0, 1]$.
Αφού f γνησίως αύξουσα στο [0, 1] έχουμε $t \leq x \Rightarrow f(t) \leq f(x)$
οπότε $f(x) - f(t) \geq 0$ για κάθε $x \in (0, 1]$.
Ακόμη $g(t) > 0$ στο (0, 1].
άρα και $g(t) \cdot [f(x) - f(t)] \geq 0$ για κάθε $x \in (0, 1]$ και για κάθε $t \in [0, x]$.
Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $t = x$
Ακόμη η $g(t) \cdot [f(x) - f(t)]$ συνεχής στο [0, x] με $x \in (0, 1]$.
Άρα $\int_0^x g(t)[f(x) - f(t)]\,dt > 0$ με $x \in (0, 1]$.
Επομένως για κάθε $x \in (0, 1]$ έχουμε:

$$\int_0^x g(t)f(x)\,dt - \int_0^x f(t)g(t)\,dt > 0$$

$$\Leftrightarrow f(x)\int_0^x g(t)\,dt > \int_0^x f(t)g(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow f(x)G(x) > F(x).$$

γ. Είναι για κάθε $x \in (0, 1]$ και για κάθε $t \in [0, x]$: $g(t) > 0$.
Επίσης g συνεχής στο [0, x] άρα η $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη και θετική για κάθε $x \in (0, 1]$.

Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $H(x)=\dfrac{F(x)}{G(x)}$ που ορίζεται και παραγωγίζεται στο (0, 1] με

$$H'(x)=\frac{F'(x)G(x)-F(x)G'(x)}{G^2(x)}=\frac{f(x)g(x)G(x)-F(x)g(x)}{G^2(x)}=$$

$=\dfrac{g(x)\big(f(x)G(x)-F(x)\big)}{G^2(x)}>0$ στο (0, 1]. (Διότι από το ερώτημα β είναι $f(x)G(x)-F(x)>0$).

Άρα η συνάρτηση H είναι γνησίως αύξουσα στο (0, 1] και επομένως για $x \in (0, 1]$ έχουμε: $x \le 1 \Rightarrow H(x) \le H(1)$ δηλαδή $\dfrac{F(x)}{G(x)} \le \dfrac{F(1)}{G(1)}$.

δ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)g(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt}\cdot\dfrac{\int_0^{x^2} \eta\mu(t^2)\,dt}{x^5}$ για κάθε $x \in (0, 1]$.

- Αφού οι F, G παραγωγίσιμες στο [0, 1] είναι και συνεχείς σε αυτό άρα:

$$\lim_{x\to0^+} F(x)=F(0)=0$$
$$\lim_{x\to0^+} G(x)=G(0)=0$$

Συνεπώς:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x f(t)g(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt}=\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)}{G(x)}$$

$$\underset{L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to0^+} f(x)\underset{\sigma\tau o\,[0,1]}{\overset{f\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{=}}f(0).\quad (1)$$

- Η $\varphi(t)=\eta\mu(t^2)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η x^2 είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα η $\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και άρα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Άρα $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\int_0^{x^2}\eta\mu(t^2)dt\right)=\int_0^0\eta\mu(t^2)dt=0$

Ακόμη $\lim\limits_{x\to0^+}x^5=0$

Συνεπώς

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu(t^2)dt}{x^5}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{LH}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^{x^2}\eta\mu(t^2)dt\right)'}{(x^5)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu(x^4)\cdot 2x}{5x^4}=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\eta\mu(x^4)}{x^4}\cdot\frac{2}{5}x\right]=$$

$$=1\cdot\frac{2}{5}\cdot 0=0 \quad (2)$$

Επομένως: $\lim\limits_{x\to 0^+}K(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt}{x^5}\right)\overset{(1)}{\underset{(2)}{=}}f(0)\cdot 0=0$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΕΤΟΣ 2007

ΘΕΜΑ 1°

Α1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0,

ισχύει $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Τότε για κάθε $x \neq x_0$, ισχύει:

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0),$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=$$

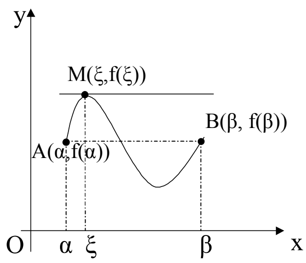
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0,$$

άρα

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή, η f είναι συνεχής στο x_0.

Α2. Γεωμετρικά το θεώρημα Rolle σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\ \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi,\ f(\xi))$ είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.



Β.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Λ	Σ	Σ	Λ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Για τον υπολογισμό του ορίου $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$,

θέτουμε u = 3x $\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{u}{3}$ και $x \to 0^- \Leftrightarrow u \to 0^-$,

οπότε για x < 0, έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\eta\mu 3x}{x} = \lim_{u\to 0^-} \frac{\eta\mu u}{\frac{u}{3}} = \lim_{u\to 0^-} \frac{3\eta\mu u}{u} = 3.$$

β. Η f είναι συνεχής στο 0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ $\Leftrightarrow$ β = 3.

Επίσης για x > 0, έχουμε f΄(x) = 2x + α – β·ημx,

οπότε $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi \Leftrightarrow 2\cdot\dfrac{\pi}{2} + \alpha - \beta\cdot\eta\mu\dfrac{\pi}{2} = \pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \pi + \alpha - 3\cdot 1 = \pi \Leftrightarrow \alpha = 3.$

Συνεπώς α = β = 3.

γ. $$\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi (x^2 + 3x + 3\sigma\upsilon\nu x)dx = \left[\frac{x^3}{3} + 3\cdot\frac{x^2}{2} + 3\cdot\eta\mu x\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{\pi^3}{3} + 3\cdot\frac{\pi^2}{2} + 3\cdot\eta\mu\pi = \frac{\pi^2(2\pi+9)}{6}.$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο (0, +∞), ως άθροισμα των συνεχών e^x (εκθετική) και e·lnx (γινόμενο σταθερής με λογαριθμική), με

$$f'(x) = e^x - \frac{e}{x} = \frac{e^x\cdot x - e}{x}.$$

Η f΄ είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο (0, +∞), ως άθροισμα των παραγωγίσιμων e^x (εκθετική) και e·lnx (γινόμενο σταθερής με λογαριθμική), με

$$f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2} = \frac{e^x\cdot x^2 + e}{x^2}.$$

Αφού $f''(x) > 0$ στο (0, +∞),

έχουμε ότι η f΄ είναι γνησίως αύξουσα στο (0, +∞).

Συνεπώς για x > 1 ισχύει f΄(x) > f΄(1) $\Leftrightarrow$ f΄(x) > 0,

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο [1, +∞).

β. Επίσης για 0 < x < 1 ισχύει f΄(x) < f΄(1) $\Leftrightarrow$ f΄(x) < 0,

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0, 1].

Επομένως

x	0		1		$+\infty$
f΄(x)		–	0	+	
f(x)		↘		↗	

άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x = 1, το f(1) = e, άρα ισχύει $f(x) \geq e$, για $x > 0$.

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = \int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t)dt - \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(t)dt - \int_{2}^{4} f(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ g(x) = \int_{x^2+1}^{x^2+3} f(t)dt - \int_{2}^{4} f(t)dt\text{, όπου } x\in(0, +\infty).$$

Το 1 είναι προφανής ρίζα της g(x), αφού g(1) = 0.

Επίσης για $x\in(0, +\infty)$, η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη, ως διαφορά των παραγωγίσιμων $\int_{x^2+1}^{x^2+3} f(t)dt$ [η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, άρα ορίζεται η $\int_{x^2+1}^{x^2+3} f(t)dt$, η οποία είναι παραγωγίσιμη) και $\int_{2}^{4} f(t)dt$ (σταθερή), οπότε έχουμε:

$g'(x) = f(x^2+3)\cdot 2x - f(x^2+1)\cdot 2x = \left[f(x^2+3) - f(x^2+1)\right]\cdot 2x$ όπου $g'(x) > 0$, αφού $x^2 + 3 > x^2 + 1$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$, οπότε $f(x^2 + 3) > f(x^2 + 1)$.

Συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και έχει το πολύ μια ρίζα.

Επομένως το 1 είναι μοναδική ρίζα της g(x) = 0.

ΘΕΜΑ 4ο

Για $2 + \overline{z_1} \neq 0 \Leftrightarrow 2 + \alpha - \beta\cdot i \neq 0 \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \neq (-2, 0)$, έχουμε:

$$z_2 = \frac{2-\alpha+\beta i}{2+\alpha-\beta i} = \frac{(2-\alpha+\beta i)\cdot(2+\alpha+\beta i)}{(2+\alpha-\beta i)\cdot(2+\alpha+\beta i)} =$$

$$= \frac{(2-\alpha)\cdot(2+\alpha)+\beta^2 i^2+(2-\alpha)\cdot\beta i+(2+\alpha)\cdot\beta i}{(2+\alpha)^2+\beta^2} =$$

$$= \frac{4-\alpha^2-\beta^2+4\beta i}{(2+\alpha)^2+\beta^2} = \frac{4-\alpha^2-\beta^2}{(2+\alpha)^2+\beta^2} + \frac{4\beta}{(2+\alpha)^2+\beta^2}\cdot i.$$

α. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι ισχύει: $z\in\Re \Leftrightarrow z = \overline{z}$.

$$z\in\Re \Leftrightarrow \text{Im}z = 0 \Leftrightarrow \frac{z-\overline{z}}{2i} = 0 \Leftrightarrow z - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z}.$$

Με βάση την παραπάνω πρόταση έχουμε:

$$z_2 - z_1\in\Re \Leftrightarrow z_2 - z_1 = \overline{z_2} - \overline{z_1} \Leftrightarrow z_2 - \overline{z_2} = z_1 - \overline{z_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2i\cdot\text{Im}(z_2) = 2i\cdot\text{Im}(z_1) \Leftrightarrow \frac{4\beta}{(2+\alpha)^2+\beta^2} = \beta \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4\beta = \beta\cdot[(2 + \alpha)^2 + \beta^2] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\beta - \beta\cdot[(2 + \alpha)^2 + \beta^2] = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \beta\cdot[4 - (2 + \alpha)^2 - \beta^2] = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \beta = 0$ (απορρίπτεται) ή $4 - (2 + \alpha)^2 - \beta^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 = (2 + \alpha)^2 + \beta^2$ **(I)** $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 = 4 + 4\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \beta^2 = -4\alpha - \alpha^2$ **(II)**

Τότε λόγω των (I) και (II) βρίσκουμε:

$$z_2 = \frac{4-\alpha^2-(-\alpha^2-4\alpha)}{4} + \frac{4\beta}{4}\cdot i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \frac{4-\alpha^2+\alpha^2+4\alpha}{4} + \beta\cdot i \Leftrightarrow z_2 = (1+\alpha)+\beta\cdot i \quad \textbf{(III)}$$

Επίσης:

$$z_2 - z_1 = (1+\alpha)+\beta\cdot i - (\alpha+\beta\cdot i) = 1+\alpha+\beta\cdot i-\alpha-\beta\cdot i = 1.$$

β. Από την (I) έχουμε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z_1 στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο $K(-2, 0)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

γ. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι ισχύει: $z \in I \Leftrightarrow z = -\overline{z}$.

$$z \in I \Leftrightarrow \operatorname{Re}z = 0 \Leftrightarrow \frac{z+\overline{z}}{2} = 0 \Leftrightarrow z+\overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = -\overline{z}.$$

Με βάση την παραπάνω πρόταση έχουμε:

$$z_1^2 \in I \Leftrightarrow z_1^2 = -\overline{z_1^2} \Leftrightarrow z_1^2 = i^2\cdot\overline{z_1}^2 \Leftrightarrow z_1 = \pm i\cdot\overline{z_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha+\beta i = \pm i\cdot(\alpha+\beta i) \Leftrightarrow \alpha+\beta i = \pm\alpha i \pm \beta i^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha+\beta i = \mp\beta \pm \alpha i \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \mp\beta \\ \beta = \pm\alpha \end{cases}.$$

Συνεπώς αφού $\alpha = \pm\beta$ και $\alpha\beta > 0$, έχουμε $\alpha = \beta$, οπότε

$z_1 = \alpha + \alpha\cdot i$.

Τότε:

$$\left(z_1+1+i\right)^{20} - \left(\overline{z_1}+1-i\right)^{20} = [(\alpha+1)+(\alpha+1)\cdot i]^{20} - [(\alpha+1)-(\alpha+1)\cdot i]^{20} =$$

$$= [(\alpha+1)\cdot(1+i)]^{20} - [(\alpha+1)\cdot(1-i)]^{20} = (\alpha+1)^{20}\cdot(1+i)^{20} - (\alpha+1)^{20}\cdot(1-i)^{20} =$$

$$= (\alpha+1)^{20}\cdot[(1+i)^{20}-(1-i)^{20}] = (\alpha+1)^{20}\cdot\{[(1+i)^2]^{10} - [(1-i)^2]^{10}\} =$$

$$= (\alpha+1)^{20}\cdot[(1+2i+i^2)^{10} - (1-2i+i^2)^{10}] = (\alpha+1)^{20}\cdot[(2i)^{10} - (-2i)^{10}] =$$

$$= (\alpha+1)^{20}\cdot[2^{10}i^{10} - (-2)^{10}i^{10}] = (\alpha+1)^{20}\cdot(2^{10}i^{10} - 2^{10}i^{10}) = 0.$$

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ</u> 2008

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Θεωρία (Σελ. 235 σχολ. βιβλίου).

Α.2 Θεωρία (Σελ. 191 σχολ. βιβλίου).

Β

- **α.** Σωστό
- **β.** Σωστό
- **γ.** Λάθος
- **δ.** Λάθος
- **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

α. Η ισότητα $\left|(i+2\sqrt{2})z\right| = 6$, γράφεται ισοδύναμα:

$$\left|i+2\sqrt{2}\right| \cdot |z| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{8+1} \cdot |z| = 6 \Leftrightarrow 3|z| = 6 \Leftrightarrow |z| = 2.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο, ακτίνα $\rho = 2$ και εξίσωση (c): $x^2 + y^2 = 2^2$.

β. Η δοσμένη σχέση για τους μιγαδικούς αριθμούς w περιγράφει τη μεσοκάθετο του τμήματος **ΓΔ**, όπου **Γ**(1, −1) και **Δ**(3, −3). Πιο αναλυτικά αν $w = x + yi$ οι μιγαδικοί αριθμοί που ικανοποιούν τη δοσμένη σχέση, έχουμε:

$$|w-(1-i)| = |w-(3-3i)| \Leftrightarrow |x+yi-1+i| = |x+yi-3+3i| \Leftrightarrow$$

$$|(x-1)+(y+1)i|^2 = |(x-3)+(y+3)i|^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = (x-3)^2 + (y+3)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 \Leftrightarrow$$

$$4x - 4y - 16 = 0 \Leftrightarrow x - y - 4 = 0.$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων Μ(w) είναι τα σημεία της ευθείας (ε) με εξίσωση: $x - y - 4 = 0$.

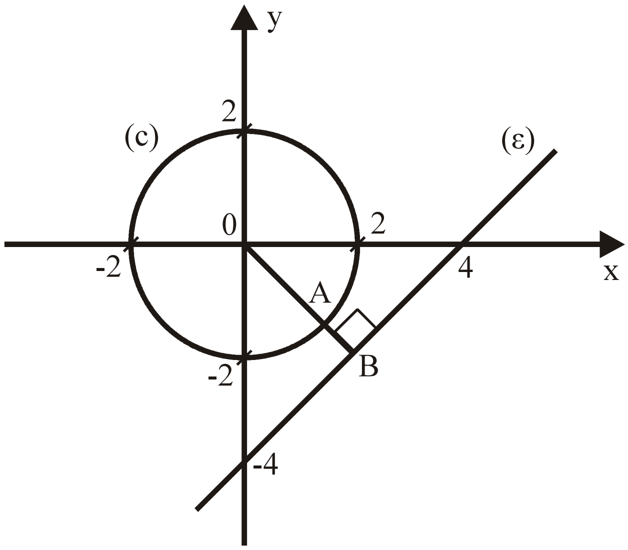
γ. Η ελάχιστη τιμή του $|w|$ είναι η απόσταση του σημείου Ο από την ευθεία

(ε): $x - y - 4 = 0$, δηλαδή:

$$d(O,\varepsilon) = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

δ. Σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα, όπου αναπαριστώνται γεωμετρικά οι γεωμετρικοί τόποι των εικόνων (c), (ε) αντίστοιχα των μιγαδικών αριθμών z και w βρίσκουμε ότι, η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ είναι το μήκος του τμήματος ΑΒ:

$$AB = OB - OA = 2\sqrt{2} - \rho = 2(\sqrt{2}-1)\,.$$



ΘΕΜΑ 3ο

α) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot \ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{De l' Hospital}}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=\!=}} =$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0\,.$$

Επίσης $f(0)=0$. Συνεπώς f συνεχής στο 0.

β) Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο συνεχών και συνεχής στο 0 λόγω του α.

Άρα η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Για $x>0$: $f'(x) = (x\ln x)' = (x)'\ln x + x\cdot(\ln x)' = \ln x + x\dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$.

Έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f΄		-	0	+	
f		↘		↗	

- Στο $\left[0,\frac{1}{e}\right)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα:

$$f\left(\left[0,\frac{1}{e}\right)\right)=\left(\lim_{x\to\frac{1}{e}} f(x),\ f(0)\right]=\left(-\frac{1}{e},0\right].$$

- Στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα:

$$f\left(\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\right)=\left[f\left(\frac{1}{e}\right),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right).$$

Επομένως: $f([0,\ +\infty))=\left(-\frac{1}{e},\ 0\right]\cup\left[-\frac{1}{e},\ +\infty\right)=\left[-\frac{1}{e},\ +\infty\right)$.

γ.

Επειδή $e^{\frac{a}{x}}>0$, για κάθε $x\neq 0$, για την εξίσωση $x=e^{\frac{a}{x}}$ προκύπτει ο περιορισμός $x\in(0,+\infty)$. Με τον περιορισμό αυτό η εξίσωση $x=e^{\frac{a}{x}}$ γράφεται ισοδύναμα:

$$\ln x=\ln e^{\frac{a}{x}} \Leftrightarrow \ln x=\frac{a}{x} \Leftrightarrow x\ln x=a \Leftrightarrow f(x)=a,\ \ x>0 \quad (1).$$

Επειδή το σύνολο των τιμών της f βρέθηκε $\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$ προκύπτουν οι περιπτώσεις:

i) Αν $a\in(-\infty,-\frac{1}{e})$ η (1) είναι αδύνατη.

ii) Αν $a=-\frac{1}{e}$, η τιμή $-\frac{1}{e}$ είναι η ελάχιστη τιμή της f την οποία παίρνει μόνον για $x=\frac{1}{e}$.

Έτσι η (1) έχει την ρίζα $x=\frac{1}{e}$.

iii) Αν $a\in(-\frac{1}{e},0)$, επειδή $\left(-\frac{1}{e},0\right)=f\left(\left(0,\frac{1}{e}\right)\right)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ προκύπτει ότι, η (1) έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ που είναι θετική.

Επίσης επειδή $\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)=f\left(\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\right)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ προκύπτει ότι η (1) έχει ακριβώς άλλη μία ρίζα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ που είναι επίσης θετική.

iv) Αν $a=0$ η (1) γίνεται $x\ln x=0 \Leftrightarrow x=0$ (απορρίπτεται) ή $\ln x=0\Leftrightarrow x=1$. (Μία ρίζα θετική).

v) Αν $a\in(0,+\infty)$ επειδή $(0,+\infty)\subseteq\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)=f\left(\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\right)$ και η f γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, προκύπτει ότι η (1) έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, που είναι θετική.

δ. Είναι $f''(x)=\frac{1}{x}>0$ για κάθε $x>0$.

Άρα f' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[x, x+1]$, για κάθε $x>0$.

Άρα υπάρχει $\xi\in(x,\ x+1)$: $\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f'(\xi)\Leftrightarrow f(x+1)-f(x)=f'\xi)\quad(2)$.

Όμως $\xi<x+1 \overset{f'\text{ γν. αύξουσα}}{\Longrightarrow} f'(\xi)<f'(x+1)\overset{(2)}{\Longrightarrow} f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Το $\int_0^2 f(t)dt$ είναι πραγματικός αριθμός.

Έτσι μπορούμε να θέσουμε $\int_0^2 f(t)dt = k \in R$. **(1)**

Τότε $f(x) = (10x^3 + 3x)k - 45$ και άρα :

$$\int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 \left[\left(10t^3 + 3t\right)k - 45\right]dt = \left[k\left(10\frac{t^4}{4} + 3\frac{t^2}{2}\right) - 45t\right]_0^2 = 40k + 6k - 90 = 46k - 90.$$

(2)

Από τις **(1)**, **(2)** προκύπτει ότι: $k = 46\,k - 90 \Leftrightarrow k = 2$

Οπότε τελικά: $f(x) = (10x^3 + 3x)2 - 45 = 20x^3 + 6x - 45$.

β) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[-\frac{g'(x-h) - g'(x)}{h}\right] =$$

$$\xlongequal[\substack{h \to 0 \\ u \to 0}]{-h=u} \lim_{u\to 0}\left[-\frac{g'(x+u) - g'(x)}{-u}\right] = \lim_{u\to 0}\frac{g'(x+u) - g'(x)}{u} = g''(x),$$

αφού ή g από υπόθεση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

γ) (i) Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{h\to 0}\frac{\left[g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)\right]'}{(h^2)'} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{h} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\left[\frac{g'(x+h) - g'(x) - g'(x-h) + g'(x)}{h}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\left[\frac{g'(x+h) - g'(x)}{h} + \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[g''(x) + g''(x)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot g''(x) = g''(x).$$

Οπότε $g''(x) = f(x) + 45 = (20x^3 + 6x - 45) + 45 = 20x^3 + 6x$.

Η $g''(x) = 20x^3 + 6x$ γράφεται:

$$\left(g'(x)\right)' = (20\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^2}{2})' \Rightarrow g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + c_1.$$

Για $x = 0$ έχουμε: $g'(0) = c_1 = 1$. Οπότε $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$.

Η $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$ τώρα γράφεται:

$$g'(x) = \left(5\frac{x^5}{5} + 3\frac{x^3}{3} + x\right)' \Rightarrow g(x) = x^5 + x^3 + x + c_2$$

Για $x = 0$ έχουμε: $g(0) = c_2 = 1$

Άρα $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$.

(ii) Η $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$.

Όμως $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και '1–1'.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΕΤΟΣ 2008

ΘΕΜΑ 1°

Α. Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο [α, β]. Επειδή η G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], θα υπάρχει $c\in\Re$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c \quad \textbf{(I)}$$

Για x = α, η (I) γίνεται:

$$G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt+c=0+c=c .$$

Επομένως:

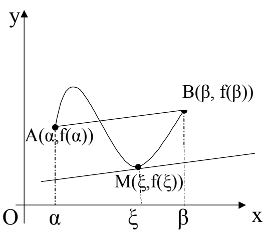
$$G(x) = F(x) + G(\alpha)$$

και για x = β γίνεται:

$$G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha) \Leftrightarrow G(\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+G(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha) .$$

Β. Γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ(ξ, f(ξ)) να είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ, με Α(α, f(α)) και Β(β, f(β)).



Γ.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Λ	Σ	Λ	Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Από τους τύπους του Vieta έχουμε $\begin{cases} z_1+z_2=-\dfrac{\beta}{1} \\ z_1\cdot z_2=\dfrac{\gamma}{1}\end{cases}$ και αφού η εξίσωση έχει πραγματικούς συντελεστές ισχύει και ότι $z_1=\overline{z_2}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

Συνεπώς:

$$\begin{cases} \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}=-\beta \\ \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}=\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cdot\dfrac{1}{2}=-\beta \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\gamma \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-1 \\ \gamma=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=1 \end{cases}.$$

β. Από την εξίσωση $z^2-z+1=0$, παίρνουμε ότι:

$z_1^2-z_1+1=0 \Leftrightarrow z_1^2=z_1-1$ **(Ι)** και $z_1^2-z_1=-1$ **(ΙΙ)**

Πολλαπλασιάζοντας την (Ι) με z_1 προκύπτει ότι

$z_1^3=z_1^2-z_1$ και λόγω της (ΙΙ) γίνεται: $z_1^3=-1$.

γ. $|w|=\left|z_1-\overline{z_1}\right| \Leftrightarrow |w|=|2i\cdot \operatorname{Im} z_1| \Leftrightarrow |w|=2\cdot|i|\cdot|\operatorname{Im} z_1| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |w|=2\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow |w|=\sqrt{3}$.

Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού w στο μιγαδικό επίπεδο που ικανοποιεί την εξίσωση $|w|=\sqrt{3}$ είναι κύκλος με κέντρο Ο(0, 0), ακτίνα $R=\sqrt{3}$ και αν $w = x + yi$, με $x, y\in\Re$ ο κύκλος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 3$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων x^2 (πολυωνυμική), $-2\cdot\ln x$ (γινόμενο σταθερής με λογαριθμική), με

$f'(x)=2x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2-2}{x}=\dfrac{2(x-1)(x+1)}{x}$.

Λύνουμε την ανίσωση:

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x-1)(x+1)}{x}\geq 0 \Leftrightarrow x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$.

Συνεπώς:

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0, 1] και
- η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$,

οπότε

	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x = 1, το f(1) = 1 και ισχύει $f(x)\geq f(1) \Leftrightarrow$ $f(x)\geq 1$, για κάθε $x\in(0, +\infty)$.

β. ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΕΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

Για x > 0, έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-2\ln x)=+\infty$, άρα η ευθεία x = 0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

ΠΛΑΓΙΕΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

Για x > 0, έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{2\ln x}{x}\right)=+\infty \text{, αφού}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}\overset{\text{De L'Hospital}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0,$$

οπότε δεν υπάρχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

γ. i. Για x > 0 η $g(x)=\dfrac{\ln x}{f(x)}$ είναι συνεχής στο (0, +∞) ως πηλίκο των συνεχών συναρτήσεων lnx (λογαριθμική), f(x).

Για x > 0, έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^2-2\ln x}\overset{\text{De L'Hospital}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{2x-2\cdot\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{2x^2-2}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2x^2-2}=-\frac{1}{2}.$$

Η g είναι συνεχής στο 0 ⇔ $\lim_{x\to0^+}g(x)=g(0)$ ⇔ $k=-\frac{1}{2}$.

ii. Θεώρημα Bolzano για την g στο [0, e]

- Η g είναι συνεχής στο [0, e]
- $g(0)=-\frac{1}{2}<0$, $g(e)=\dfrac{\ln e}{e^2-2\ln e}=\dfrac{1}{e^2-2}>0$, άρα g(0)·g(e) < 0

οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της g(x) = 0 στο διάστημα (0, e).

ΘΕΜΑ 4ο

Αφού f(x) > 0, ισχύει ότι $F(x)=\int_0^x f(t)dt>0$ και

$\int_0^x tf(t)dt>0$ για x > 0, άρα $h(x)=\dfrac{F(x)}{\int_0^x tf(t)dt}>0$.

α. $\int_0^1 e^{t-1}[f(t)+F(t)]dt=\int_0^1[e^{t-1}\cdot F'(t)+e^{t-1}F(t)]dt=$

$$=\int_0^1[e^{t-1}\cdot F(t)]'dt=\left[e^{t-1}\cdot F(t)\right]_0^1=e^{1-1}\cdot F(1)-e^{0-1}\cdot F(0)=F(1).$$

β. Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞), ως πηλίκο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων F(x) (είναι η παράγουσα της f, άρα και παραγωγίσιμη), $\int_0^x tf(t)dt$ (η

$t\cdot f(t)$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, οπότε ορίζεται η $\int_0^x tf(t)dt$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με

$$h'(x) = \frac{F'(x)\cdot\int_0^x tf(t)dt - F(x)\cdot xf(x)}{\left(\int_0^x tf(t)dt\right)^2} = \frac{f(x)\cdot\left\{\int_0^x tf(t)dt - xF(x)\right\}}{\left(\int_0^x tf(t)dt\right)^2} =$$

$$= \frac{f(x)\cdot\left\{\int_0^x tf(t)dt - x\cdot\int_0^x f(t)dt\right\}}{\left(\int_0^x tf(t)dt\right)^2} = \frac{f(x)\cdot\left\{\int_0^x tf(t)dt - \int_0^x x\cdot f(t)dt\right\}}{\left(\int_0^x tf(t)dt\right)^2} =$$

$$= \frac{f(x)\cdot\int_0^x \left\{tf(t) - xf(t)\right\}dt}{\left(\int_0^x tf(t)dt\right)^2} = \frac{f(x)\cdot\int_0^x f(t)\cdot(t-x)dt}{\left(\int_0^x tf(t)dt\right)^2}.$$

Όμως $h'(x) < 0$, για $x > 0$,

αφού $f(x) > 0$, $t - x < 0$, για $t\in(0, x)$ και $x > 0$.

Συνεπώς η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

γ. $h(1) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{F(1)}{\int_0^1 tf(t)dt} = 2 \Leftrightarrow F(1) = 2\cdot\int_0^1 tf(t)dt \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f(t)dt = 2\cdot\int_0^1 tf(t)dt$ **(III)**

Επιπλέον:

(III) $\Leftrightarrow \int_0^1 f(t)dt = 2\cdot\int_0^1 tf(t)dt \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)\cdot(1-2t)dt = 0$.

i. Η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε ισοδύναμα γράφεται:

$$\int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt < 2\cdot\int_0^1 tf(t)dt + 2\cdot\int_1^2 tf(t)dt$$

και λόγω της (III) γίνεται:

$\int_1^2 f(t)dt < 2\cdot\int_1^2 tf(t)dt \Leftrightarrow \int_1^2 f(t)\cdot(1-2t)dt < 0$, η οποία ισχύει άρα και η αρχική, αφού $f(t) > 0$ και

$t\in(1, 2) \Leftrightarrow 1 < t < 2 \Leftrightarrow -2 > -2t > -4 \Leftrightarrow -1 > 1 - 2t < -3$, άρα $1 - 2t < 0$.

ii. (III) $\Leftrightarrow F(1) = 2\cdot\int_0^1 t\cdot F'(t)dt = 2\cdot\left\{\left[t\cdot F(t)\right]_0^1 - \int_0^1 F(t)dt\right\} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ F(1) = 2\cdot\left\{1\cdot F(1) - 0\cdot F(0) - \int_0^1 F(t)dt\right\}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ F(1) = 2\cdot\left\{F(1) - \int_0^1 F(t)dt\right\}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ F(1) = 2\cdot F(1) - 2\cdot\int_0^1 F(t)dt\ \Leftrightarrow\ F(1) = 2\cdot\int_0^1 F(t)dt\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{F(1)}{2} = \int_0^1 F(t)dt\,.$$

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ</u> 2009

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία - Θεώρημα σελίδα 251 σχολ. βιβλίου.

Β. Θεωρία - Ορισμός σελίδα 213 σχολ. βιβλίου.

Γ.

α. Σωστό

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Λάθος

ε. Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

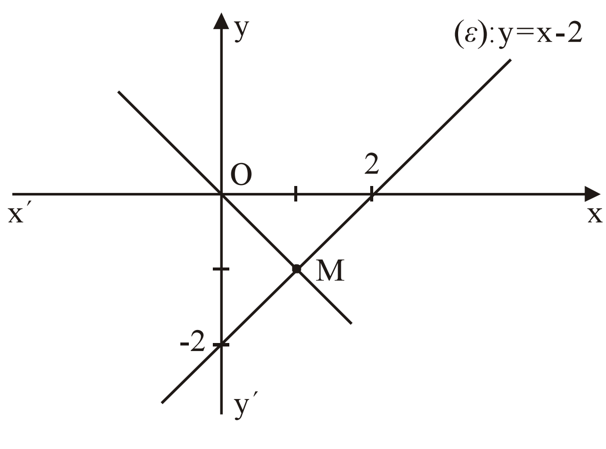
Α.

α. Έστω $z = x + yi$ και $M(x, y)$ η εικόνα του. Τότε $x + yi = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i$.

Άρα $x = 2\lambda + 1$ και $y = 2\lambda - 1$. Έτσι όμως $y - x = -2 \Leftrightarrow y = x - 2$.

Δηλαδή οι εικόνες των μιγαδικών z βρίσκονται στην ευθεία $(\varepsilon): y = x - 2$.

β. Ο μιγαδικός z_0 με το μικρότερο μέτρο έχει εικόνα το σημείο M για το οποίο είναι $OM \perp (\varepsilon)$.



Αφού $OM \perp (\varepsilon) \Rightarrow \lambda_{OM} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Rightarrow \lambda_{OM} \cdot 1 = -1 \Rightarrow \lambda_{OM} = -1$.

Άρα η εξίσωση της OM είναι: $y = -x$.

Οι συντεταγμένες του M (σημείου τομής των OM, ε) προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων $y = -x$, $y = x - 2$.

Επομένως $M : \begin{cases} y = -x \\ y = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ -x = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$. Άρα $M(1, -1)$ και $z_0 = 1 - i$.

Β. Έστω $w = x + yi$, με $x, y \in \mathrm{R}$. Η εξίσωση $|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_0$ γράφεται

$x^2 + y^2 + x - yi - 12 = 1 - i \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 12 - yi = 1 - i \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 12 = 1$

και $y = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$ και $y = 1 \Leftrightarrow (x = -4$ ή $x = 3)$ και $y = 1$.

Άρα $w = -4 + i$ ή $w = 3 + i$.

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Ισχύει ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$. Δηλαδή $\alpha^x - \ln(x+1) \geq 1$ για κάθε $x > -1$.

Όμως $f(0) = 1$, οπότε $f(\mathrm{x}) \geq f(0)$ για κάθε $x > -1$.

Επομένως η f παρουσιάζει στη θέση $x = 0$ (ολικό, άρα και τοπικό) ελάχιστο το $f(0) = 1$.

Ακόμη η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, +\infty)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f\,'(0) = 0$.

Όμως $f\,'(x) = a^x \ln a - \dfrac{1}{x+1}$, οπότε $f\,'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e$.

Β.

α. Για $\alpha = e$ είναι $f(x) = e^x - \ln(x+1)$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, +\infty)$ με $f\,'(x) = e^x - \dfrac{1}{x+1}$ και

$$f\,''(x) = \left(e^x - \frac{1}{x+1}\right)' = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in (-1, +\infty).$$

Άρα η f είναι κυρτή.

β. Αφού η f είναι κυρτή στο $(-1, \infty)$ προκύπτει ότι η $f\,'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, \infty)$, με προφανή ρίζα $x = 0$ που είναι και μοναδική αφού η $f\,'$ είναι γνησίως αύξουσα.

Έτσι αν $-1 < x < 0 \Rightarrow f\,'(x) < f\,'(0) = 0$, ενώ αν $x > 0 \Rightarrow f\,'(x) > f\,'(0) = 0$.

Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

γ. Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται: $\dfrac{(f(\beta)-1)(x-2) + (f(\gamma)-1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \big(f(\beta) - 1\big)(x - 2) + \big(f(\gamma) - 1\big)(x - 1)$, με $x \in [1, 2]$.

Η g είναι συνεχής στο R ως πολυωνυμική άρα και στο $[1, 2]$.

- $g(1) = -\big(f(\beta) - 1\big) = 1 - f(\beta) = f(0) - f(\beta) < 0$, διότι $f(0)$ ολικό ελάχιστο της f και $\beta \neq 0$,
- $g(2) = f(\gamma) - 1 = f(\gamma) - f(0) > 0$, επίσης διότι $f(0)$ ολικό ελάχιστο της f και $\gamma \neq 0$.

*(Πιο αναλυτικά είναι $f(0) - f(\beta) < 0$ διότι:

Αν $\beta \in (-1, 0)$ επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό ισχύει:

$-1 < \beta < 0 \Rightarrow f(\beta) > f(0) \Rightarrow f(0) - f(\beta) < 0$

Αν $\beta \in (0, +\infty)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό ισχύει:

$0 < \beta \Leftrightarrow f(0) > f(\beta)$.

Ομοίως προκύπτει $f(\gamma) - f(0) > 0$).

Άρα $g(1) \cdot g(2) < 0$, οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ ώστε

$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \big(f(\beta) - 1\big)(x_0 - 2) + \big(f(\gamma) - 1\big)(x_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\big(f(\beta)-1\big)(x_0-2)+\big(f(0)-1\big)(x_0-1)}{(x_0-1)(x_0-2)} = 0 .$$

Άρα η δοσμένη εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.

*Παρατήρηση: Θέτοντας χάριν συντομίας $f(\beta) - 1 = \kappa > 0$ και $f(\gamma) - 1 = \lambda > 0$ θα μπορούσαν να δοθούν και οι παρακάτω λύσεις:

α) Η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{\kappa}{x-1} + \dfrac{\lambda}{x-2}$ με πεδίο ορισμού το $(1, 2)$ έχει όρια $+\infty$ και $-\infty$ αντίστοιχα όταν $x \to 1^+$ και $x \to 2^-$ ενώ αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι είναι και γνησίως φθίνουσα στο $(1, 2)$, διότι $h(x) = -\left(\dfrac{\kappa}{(x-1)^2} + \dfrac{\lambda}{(x-2)^2}\right) < 0$ για κάθε $x \in (1, 2)$, άρα έχει σύνολο τιμών το $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x), \lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = (-\infty, +\infty)$ και άρα το μηδέν περιέχεται στο σύνολο τιμών της δηλαδή η h έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$.

Επίσης εναλλακτικά από το ότι η h έχει όρια $+\infty$ και $-\infty$ αντίστοιχα όταν $x \to 1^+$ και $x \to 2^-$, προκύπτει ότι υπάρχουν αριθμοί γ, δ ώστε $1 < \gamma < \delta < 2$ με $f(\gamma) > 0$ και $f(\delta) < 0$ οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα (γ, δ) υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$.

β) Αλγεβρική λύση:

Θέτοντας $\dfrac{\kappa}{x-1}+\dfrac{\lambda}{x-2}=0,\ \ x\in(1,2)$ προκύπτει $\dfrac{\kappa(x-2)+\lambda(x-1)}{(x-1)(x-2)})=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \kappa(x-2)+\lambda(x-1)=0 \Leftrightarrow (\kappa+\lambda)\ x=2\kappa+\lambda \Leftrightarrow\ x=\dfrac{2\kappa+\lambda}{\kappa+\lambda}$.

Η τιμή αυτή είναι αποδεκτή ως ρίζα της εξίσωσης αφού

$$1=\frac{\kappa+\lambda}{\kappa+\lambda}<\frac{2\kappa+\lambda}{\kappa+\lambda}<\frac{2\kappa+2\lambda}{\kappa+\lambda}=2$$ (και είναι μάλιστα μοναδική ρίζα).

ΘΕΜΑ 4$^{\text{ο}}$

α) Η f συνεχής στο [0, 2] άρα και η $tf(t)$ είναι συνεχής στο [0, 2].

Επομένως η συνάρτηση $H(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο [0, 2], άρα είναι και συνεχής.

Η συνάρτηση $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ είναι παραγωγίσιμη στο [0, 2] αφού η f είναι συνεχής στο [0, 2].

Άρα η G είναι συνεχής στο (0, 2] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Εξετάζουμε τη συνέχεια της συνάρτησης G στη θέση $x_0 = 0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{H(x)}{x}-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+3\right)=0-0+3=3$, διότι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{H(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x}\ \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{xf(x)}{1}=0\cdot f(0)=0\,.$$

(είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$, αφού η f είναι συνεχής στο [0, 2], και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\int\limits_0^x tf(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^0 tf(t)\mathrm{d}t=0$ διότι η συνάρτηση $tf(t)$ είναι συνεχής, άρα η $\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ παραγωγίσιμη άρα και συνεχής.

Επίσης $G(0)=6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}=6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}=$

$=6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-1+t^2}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}=6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}=6\cdot\dfrac{1}{2}=3\,.$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}G(x)=G(0)=3\,.$

Άρα η συνάρτηση G είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$.

Επομένως η G είναι συνεχής στο [0, 2].

β. Στο διάστημα (0, 2) είναι:

- η συνάρτηση H παραγωγίσιμη αφού η f είναι συνεχής, με $H'(x) = xf(x)$.
- η συνάρτηση x παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $(x)' = 1$.

Άρα και η συνάρτηση $\dfrac{H(x)}{x}$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με:

$$\left(\frac{H(x)}{x}\right)' = \frac{H'(x)\cdot x - H(x)(x)'}{x^2} = \frac{x\cdot f(x)\cdot x - \int_0^x t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2} = f(x) - \frac{\int_0^x t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}.$$

Επίσης στο ίδιο διάστημα, αφού η f είναι συνεχής συνάρτηση θα είναι παραγωγίσιμη και η συνάρτηση $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ με $\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x)$.

Άρα η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$G'(x) = f(x) - \frac{\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2} - f(x) = -\frac{H(x)}{x^2},\ \ 0 < x < 2.$$

γ. Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο [0, 2] και παραγωγίσιμη στο (0, 2), με $G(0) = 3$ (από το β ερώτημα).

Βρίσκουμε την τιμή της G στη θέση $x = 2$: $G(2) = \dfrac{H(2)}{2} - \displaystyle\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t + 3$ (1).

Όμως

$$\int_0^2 (t-2)f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow \int_0^2 t f(t)\mathrm{d}t - 2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow \int_0^2 t f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow H(2) = 2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t.$$

Έτσι λόγω της (1) είναι

$$G(2) = \frac{2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t}{2} - \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t + 3 = 3 = G(0).$$

Ισχύουν επομένως για τη συνάρτηση G οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα [0, 2], άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $G'(\alpha) = 0$.

Όμως από β ερώτημα $G'(\alpha) = -\dfrac{H(\alpha)}{\alpha^2}$.

Άρα είναι $H(\alpha) = 0$.

δ. Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο [0, α] και παραγωγίσιμη στο (0, α). Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in$ (0, α):

$$G'(\xi) = \frac{G(a)-G(0)}{a-0} \Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{\frac{H(\alpha)}{\alpha} - \int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t + 3 - 3}{\alpha} \overset{H(a)=0}{\Longleftrightarrow}$$

$$-\frac{\int_0^\xi t\,f(t)\,\mathrm{d}\,t}{\xi^2} = -\frac{\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}\,t}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha\int_0^\xi t\,f(t)\,\mathrm{d}\,t = \xi^2\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}\,t\,.$$

***β’ τρόπος:**

Αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχει ρίζα στο (0, α), με $\alpha \in (0, 2)$ για την εξίσωση:

$$\alpha\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = x^2\cdot\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow \alpha H(x) = x^2\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow -\frac{H(x)}{x^2} = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G'(x) + \frac{1}{a}\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow \left(G(x) + \frac{x}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = 0 \qquad (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $P(x) = G(x) + \frac{x}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t$ (αρχική της $G'(x) + \frac{x}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t$), για

την οποία έχουμε :

α) είναι συνεχής στο [0, α) ως άθροισμα της συνεχούς G (από το α’ ερώτημα) και της πολυωνυμικής $\left(\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t\right)x$.

β) είναι παραγωγίσιμη στο (0, α) ως άθροισμα της παραγωγίσιμης G (από το β’ ερώτημα) και της πολυωνυμικής, $\left(\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t\right)x$ με $P'(x) = G'(x) + \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t$.

γ) $P(0) = P(\alpha) = 3$ διότι

$P(0) = G(0) + 0 = 3$ και

$$P(\alpha) = G(\alpha) + \int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{H(\alpha)}{\alpha} - \int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t + 3 + \int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{H(a)}{\alpha} + 3 = \frac{0}{\alpha} + 3 = 3\,.$$

Έτσι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle και άρα υπάρχει $\xi \in (0, \alpha)$ ώστε

$P'(\xi) = 0 \Leftrightarrow P'(\xi) = 0 \Leftrightarrow G'(\xi) + \dfrac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, δηλαδή αποδείχθηκε ότι η εξίσωση (1)

έχει ρίζα $\xi \in (0, \alpha)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΕΤΟΣ 2009

ΘΕΜΑ 1°

Α. Έστω $x_0 \in (0, +\infty)$ και για κάθε $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{x}^2-\sqrt{x_0}^2}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)} = \frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε για κάθε x κοντά στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Β. Η συνάρτηση f λέγεται **συνεχής στο x_0** του πεδίου ορισμού της αν και μόνο αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Γ.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Σ	Λ	Λ	Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Θέτουμε $z = x + yi$, με $x, y \in \Re$. Τότε:

$$(2-i)\cdot z + (2+i)\cdot \bar{z} - 8 = 0 \Leftrightarrow 2z - i\cdot z + 2\bar{z} + i\cdot \bar{z} - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\cdot\left(z+\bar{z}\right) - i\cdot\left(z-\bar{z}\right) - 8 = 0 \Leftrightarrow 2\cdot 2x - i\cdot 2yi - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x + 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow 2y = -4x + 8 \Leftrightarrow y = -2x + 4.$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία με εξίσωση $y = -2x + 4$.

β. Έστω $z_1 = x \in \Re$. Τότε:

$0 = -2x + 4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$, άρα $z_1 = 2$.

Έστω $z_2 = yi \in I$. Τότε:

$y = -2\cdot 0 + 4 = 4$, άρα $z_2 = 4i$.

γ. $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = |2+4i|^2 + |2-4i|^2 =$

$= 2^2 + 4^2 + 2^2 + (-4)^2 = 4 + 16 + 4 + 16 = 40$.

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Η συνάρτηση f(x) ισοδύναμα γράφεται $f(x) = \ln\frac{(\lambda+1)x^2+x+1}{x+2}$, για $x \in (-1, +\infty)$.

- Αν λ + 1 = 0 ⇔ λ = – 1, τότε: $f(x)=\ln\frac{x+1}{x+2}$,

  και για x > 0, έχουμε:

  $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{x+1}{x+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}\right]=$$

  $$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right)=0\in\Re,\text{ δεκτή,}$$

  αφού $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ και $\lim_{u\to0^+}\left(\ln\frac{1+u}{1+2u}\right)=\ln1=0$.

- Αν λ + 1 > 0 ⇔ λ > – 1, τότε για x > 0, έχουμε:

  $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{(\lambda+1)x^2+x+1}{x+2}\right)=$$

  $$=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\frac{x^2\left(\lambda+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}\right]=$$

  $$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{x\cdot\left(\lambda+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{2}{x}}\right)=+\infty\ \text{απορρίπτεται,}$$

  αφού $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$,

  $$\lim_{x\to+\infty}\ln[x\cdot(\lambda+1)]=+\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\frac{\lambda+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}=\lambda+1.$$

Β. Για λ = – 1, έχουμε $f(x)=\ln\frac{x+1}{x+2}$ ⇔

⇔ $f(x)=\ln(x+1)-\ln(x+2)$, x∈(–1, +∞).

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο (–1, +∞), ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων lnx (λογαριθμική), $\frac{x+1}{x+2}$ (ως ρητή), με

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-x-1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}>0,$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (–1, +∞).

Επίσης:

$$f(A)=\left(\lim_{x\to-1^+} f(x),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,0),$$

αφού $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}\left(\ln\dfrac{x+1}{x+2}\right) = -\infty$.

β. ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΕΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

Για $x > -1$, έχουμε: $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$,

άρα η ευθεία $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

ΠΛΑΓΙΕΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

Για $x > 0$, έχουμε: $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln\dfrac{x+1}{x+2}}{x} = 0$ και

$\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x) - 0\cdot x] = \lim\limits_{x\to +\infty}\ln\dfrac{x+1}{x+2} = 0$,

άρα η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη.

γ. Έστω $g(x) = f(x) + \alpha^2$, για $x\in(-1, +\infty)$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$, ως άθροισμα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων f(x) και α^2 (ως σταθερή),

με $g'(x) = f'(x) > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$, οπότε η g έχει μία το πολύ ρίζα στο $(-1, +\infty)$.

Επίσης:

$g(A) = \left(\lim\limits_{x\to -1^+} g(x), \lim\limits_{x\to +\infty} g(x)\right) = (-\infty, \alpha^2)$, με $\alpha^2 > 0$ $(\alpha \neq 0)$

οπότε $0\in g(A)$, δηλαδή, υπάρχει ρίζα της

$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + \alpha^2 = 0$ στο $(-1, +\infty)$,

η οποία είναι μοναδική αφού η g είναι γνησίως αύξουσα.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Η συνάρτηση $3x^2$ είναι συνεχής στο [0, 2] ως πολυωνυμική, η $\dfrac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}$ είναι συνεχής στο [0, 2] ως πηλίκο των συνεχών συναρτήσεων $f'(x) - 2f(x)$ [αφού $f'(x)$ παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής και $-2f(x)$ συνεχής], e^{2x} [ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων e^x (εκθετική), 2x (πολυωνυμική)], άρα η g είναι συνεχής στο [0, 2].

Επίσης η συνάρτηση $3x^2$ είναι παραγωγίσιμη στο (0, 2) ως πολυωνυμική, η $\dfrac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}$ είναι παραγωγίσιμη στο (0, 2) ως πηλίκο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f'(x) - 2f(x)$ [αφού $f'(x)$ παραγωγίσιμη, και $-2f(x)$ παραγωγίσιμη], e^{2x} [ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων e^x (εκθετική), 2x (πολυωνυμική)], άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο (0, 2),

με $g'(x) = 6x - \dfrac{\left[f''(x) - 2f'(x)\right]e^{2x} - 2e^{2x}\left[f'(x) - 2f(x)\right]}{e^{4x}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g'(x) = 6x - \dfrac{f''(x) - 2f'(x) - 2f'(x) + 4f(x)}{e^{2x}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g'(x) = 6x - \dfrac{f''(x) - 4f'(x) + 4f(x)}{e^{2x}}$,

η οποία από την υπόθεση γίνεται

$$g'(x) = 6x - \frac{k \cdot x \cdot e^{2x}}{e^{2x}} = 6x - k \cdot x = (6-k) \cdot x\,.$$

Επιπλέον:

$$g(0) = 0 - \frac{f'(0) - 2f(0)}{e^0} = -\frac{0}{1} = 0$$

$$g(2) = 3 \cdot 2^2 - \frac{f'(2) - 2f(2)}{e^{2\cdot 2}} = 12 - \frac{2f(2) + 12e^4 - 2f(2)}{e^4} = 0\,,$$

άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση $g(x)$ στο $[0, 2]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ έτσι ώστε: $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow (6 - k)\xi = 0 \Leftrightarrow k = 6$, αφού $\xi \neq 0$.

β. Από την υπόθεση για $k = 6$ και $x = \xi$, βρίσκουμε:

$f''(\xi) - 4f'(\xi) + 4f(\xi) = 6\xi e^{2\xi} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f''(\xi) + 4f(\xi) = 6\xi e^{2\xi} + 4f'(\xi)$.

γ. Για $k = 6$, έχουμε $g'(x) = 0$, άρα $g(x) = c$

και αφού $g(0) = 0$, ισχύει $g(x) = 0$, για $x \in [0, 2]$.

δ. Από την υπόθεση για $k = 6$, βρίσκουμε:

$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 6xe^{2x} \Leftrightarrow$
$e^{-2x} \cdot f''(x) - e^{-2x} \cdot 2f'(x) - e^{-2x} \cdot 2f'(x) + e^{-2x} \cdot 4f(x) = 6x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [e^{-2x} \cdot f'(x)]' - 2 \cdot [e^{-2x} \cdot f(x)]' = 6x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [e^{-2x} \cdot f'(x) - 2 \cdot e^{-2x} \cdot f(x)]' = (3x^2)'$,
άρα $e^{-2x} \cdot f'(x) - 2 \cdot e^{-2x} \cdot f(x) = 3x^2 + c_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [e^{-2x} \cdot f(x)]' = 3x^2 + c_1$, με $c_1 \in \Re$,

άρα $e^{-2x} \cdot f(x) = x^3 + c_1 \cdot x + c_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = e^{2x} \cdot (x^3 + c_1 \cdot x + c_2)$, με $c_1, c_2 \in \Re$ **(I)**

- Για $x = 1$, από την (I) βρίσκουμε:
  $f(1) = e^{2\cdot 1} \cdot (1^3 + c_1 \cdot 1 + c_2) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow f(1) = e^2 \cdot (1 + c_1 + c_2)$, άρα
  $e^2 = e^2 \cdot (1 + c_1 + c_2) \Leftrightarrow 1 = 1 + c_1 + c_2 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow c_1 + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -c_2$ **(II)**
- Για $x = 0$, από την (I) βρίσκουμε:
  $f(0) = e^{2\cdot 0} \cdot (0^3 + c_1 \cdot 0 + c_2) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow f(0) = 1 \cdot (0 + 0 + c_2) \Leftrightarrow f(0) = c_2$ **(III)**
  Όμως:
  $f'(x) = 2 \cdot e^{2x} \cdot (x^3 + c_1 \cdot x + c_2) + e^{2x} \cdot (3x^2 + c_1)$, άρα
  $f'(0) = 2 \cdot e^{2\cdot 0} \cdot (0^3 + c_1 \cdot 0 + c_2) + e^{2\cdot 0} \cdot (3 \cdot 0^2 + c_1) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow f'(0) = 2 \cdot c_2 + c_1$.
  Επίσης:
  $f'(0) = 2f(0) \Leftrightarrow c_1 + 2c_2 = 2c_2 \Leftrightarrow c_1 = 0$,
  οπότε από την (II) βρίσκουμε: $c_2 = 0$.
  Συνεπώς $f(x) = e^{2x} \cdot x^3$, για $0 \leq x \leq 2$.

ε. $$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx = \int_1^2 \frac{x^3 \cdot e^{2x}}{x^2}dx = \int_1^2 x \cdot e^{2x}dx = \int_1^2 x \cdot \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' dx =$$

$$= \left[x \cdot \frac{e^{2x}}{2}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{e^{2x}}{2}dx = 2 \cdot \frac{e^{2\cdot 2}}{2} - 1 \cdot \frac{e^{2\cdot 1}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \int_1^2 e^{2x}dx =$$

$$= 2\frac{e^4}{2} - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_1^2 =$$

$$= e^4 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{e^{2\cdot 2}}{2} - \frac{e^{2\cdot 1}}{2}\right) = e^4 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{4} =$$

$$= \frac{4e^4}{4} - \frac{2e^2}{4} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{4} = \frac{3e^4 - e^2}{4} = \frac{e^2(3e^2 - 1)}{4}.$$

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ</u> 2010

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, θεώρημα, σελίδα 304 σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία, ορισμός, σελίδα 279 σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία, ορισμός, σελίδα 273 σχολικού βιβλίου.

Α4.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Σ	Λ	Λ	Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι: $z+\dfrac{2}{z}=2 \Leftrightarrow z^2-2z+2=0$.

Άρα $z_1=\dfrac{2-2i}{2}=1-i,\quad z_2=\dfrac{2+2i}{2}=1+i$.

Β2. Είναι: $z_1^{2010}+z_2^{2010}=(1-i)^{2010}+(1+i)^{2010}=\left[(1-i)^2\right]^{1005}+\left[(1+i)^2\right]^{1005}=$

$$=(1-2i-1)^{1005}+(1+2i-1)^{1005}=(-2i)^{1005}+(2i)^{1005}=(-2)^{1005}\cdot i^{1005}+2^{1005}\cdot i^{1005}=$$

$$=(-2)^{1005}\cdot(i^2)^{502}\cdot i+2^{1005}\cdot(i^2)^{502}\cdot i=(-2^{1005})\cdot i+(2^{1005})\cdot i=-2^{1005}\cdot i+2^{1005}\cdot i=0$$

<u>2η λύση:</u>

Είναι:

$$(1-i)^{2010}+(1+i)^{2010}=(1-i)^{2010}+\left[i(1-i)\right]^{2010}=$$

$$=(1-i)^{2010}+i^{2010}\cdot(1-i)^{2010}=(1-i)^{2010}\cdot(1+i^{2010})=(1-i)^{2010}\cdot(1-1)=0$$

Β3. Είναι

$$|w-4+3i|=|z_1-z_2|=|1-i-1-i|=|-2i|=2$$

Έστω $w=x+\psi i$, τότε

$$|x+\psi i-4+3i|=2 \Leftrightarrow |(x-4)+(\psi+3)i|=2 \Leftrightarrow (x-4)^2+(\psi+3)^2=4$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(4,-3)$ και ακτίνα $\rho=2$.

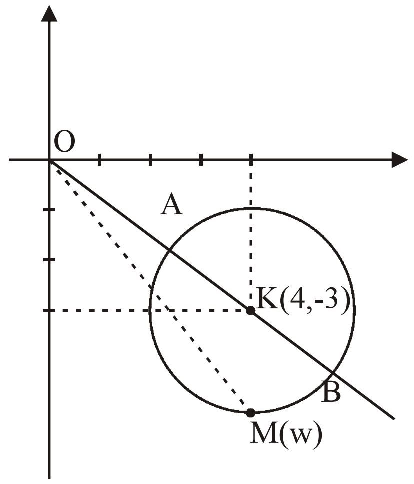
B4. Το $|w|$ είναι η απόσταση της εικόνας $M(w)$ από την αρχή $O(0, 0)$, δηλαδή το μήκος (OM). Από τη Γεωμετρία όμως, γνωρίζουμε ότι αν η ευθεία OK τέμνει τον κύκλο στα σημεία A και B τότε

$$(OA) \le (OM) \le (OB) \quad (1)$$

που σημαίνει ότι η μέγιστη τιμή του $|w|$ είναι το μήκος (OB) και η ελάχιστη το μήκος (OA).

Όμως

- $(OA) = (OK) - \rho = 5 - 2 = 3 \quad (2)$ και
- $(OB) = (OK) + \rho = 5 + 2 = 7 \quad (3)$



Επομένως, λόγω των (1), (2) και (3) έχουμε $3 \le |w| \le 7$.

<u>2η λύση:</u>

Γράφουμε :

$|w| = |w + (-4 + 3i) - (-4 + 3i)|$

Οπότε σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$\big||w + (-4 + 3i)| - |-4 + 3i|\big| \le |w + (-4 + 3i) - (-4 + 3i)| \le |w + (-4 + 3i)| + |-4 + 3i|$ ή

$\big||z_1 - z_2| - |-4 + 3i|\big| \le |w| \le |z_1 - z_2| + |-4 + 3i|$ ή $|2 - 5| \le |w| \le 2 + 5$.

Άρα $3 \le |w| \le 7$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\Re$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)' = 2 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x^2+2x+2}{x^2+1} = \frac{2(x^2+x+1)}{x^2+1}.$$

Επειδή $x^2+x+1>0$ καθώς και $x^2+1>0$ για κάθε $x \in \Re$, είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x \in \Re$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

Γ2. Η δοσμένη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$2(x^2-3x+2) = \ln\left[(3x-2)^2+1\right] - \ln(x^4+1) \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 2(3x-2) = \ln\left[(3x-2)^2+1\right] - \ln(x^4+1) \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + \ln(x^4+1) = \ln\left[(3x-2)^2+1\right] + 2(3x-2) \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + \ln(x^4+1) = 2(3x-2) + \ln\left[(3x-2)^2+1\right] \Leftrightarrow \ f(x^2) = f(3x-2) \qquad (1)$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, θα είναι και 1-1.

Επομένως από την (1) προκύπτει

$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$. Άρα $x = 1$ ή $x = 2$.

Γ3. Είναι $f''(x) = \left(2 + \dfrac{2x}{x^2+1}\right)' = 2\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)' = 2\dfrac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$

$$= 2\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}.$$

Είναι $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$, ενώ είναι $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1,1)$ και $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

Έτσι η C_f έχει σημεία καμπής στα σημεία με τετμημένες $x_1 = -1,\ x_2 = 1$.

- Η εφαπτόμενη της C_f στο $x_1 = -1$ έχει εξίσωση (ε_1):

  $y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y - (-2+\ln 2) = 1(x+1) \Leftrightarrow y = x + \ln 2 - 1$

  Για $x = 0$ προκύπτει $y = \ln 2 - 1$

- Η εφαπτόμενη της C_f στο $x_2 = 1$ έχει εξίσωση (ε_2):

  $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - (2+\ln 2) = 3(x-1) \Leftrightarrow y = 3x - 1 + \ln 2$

  Για $x = 0$ προκύπτει $y = \ln 2 - 1$.

  Οι (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $M(0, \ln 2 - 1)$ του άξονα $y'y$.

Γ4. $$\int_{-1}^{1} x f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (2x^2 + x\ln(x^2+1))\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+1)'\ln(x^2+1)\mathrm{d}x =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}[(x^2+1)\ln(x^2+1)]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+1)\left[\ln(x^2+1)\right]'\mathrm{d}x =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left[(x^2+1)\ln(x^2+1)\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+1)\frac{2x}{(x^2+1)}\mathrm{d}x =$$

$$= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}\left[x^2\right]_{-1}^{1} = 2\frac{2}{3} - \frac{1}{2}(1-1) = \frac{4}{3}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση $\varphi(t) = \dfrac{t}{f(t) - t}$ είναι

α) ορισμένη σε όλο το $\Re$ αφού $f(t) \neq t$ για κάθε $t \in \Re$ και

β) συνεχής σε όλο το $\Re$, ως πηλίκο συνεχών.

Έτσι η συνάρτηση $f(x) = \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t + x + 3$ είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, με

$$f'(x) = \varphi(x) + 1 = \frac{x}{f(x)-x} + 1 = \frac{x + f(x) - x}{f(x) - x} = \frac{f(x)}{f(x)-x},\ x \in \Re.$$

Δ2. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\Re$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$g'(x) = \left[\left(f(x)\right)^2 - 2x\cdot f(x)\right]' = 2f(x)\cdot f'(x) - 2f(x) - 2x\cdot f'(x) =$$

$$= 2f'(x)\left(f(x) - x\right) - 2f(x) \overset{(\Delta 1)}{=} 2\frac{f(x)}{f(x)-x}\left(f(x) - x\right) - 2f(x) = 0,\ x \in \Re.$$

Άρα η g είναι συνεχής στο $\Re$.

Δ3. Είναι: $f(0) = 0 + 3 + \int_0^0 \dfrac{t}{f(t) - t}\mathrm{d}t = 3$.

Λόγω του **Δ2** είναι $g(x) = c,\ c \in \Re$, για κάθε $x \in \Re$, άρα $\left(f(x)\right)^2 - 2x\cdot f(x) = c$, για κάθε $x \in \Re$.

Για $x=0$ προκύπτει $c=\left(f(0)\right)^2-2\cdot 0\cdot f(0)=9$.

Έτσι $\left(f(x)\right)^2-2x\cdot f(x)=9 \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^2-2x\cdot f(x)+x^2=x^2+9 \Leftrightarrow$

$\left(f(x)-x\right)^2=x^2+9.$ (1)

Αν θέσουμε $h(x)=f(x)-x$, έχουμε ότι η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $\Re$ και $h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Re$, αφού $f(x)\neq x$, $x\in\Re$.

Άρα η h διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\Re$, δηλαδή είναι
ή $h(x)>0$ για κάθε $x\in\Re$ ή $h(x)<0$ για κάθε $x\in\Re$.

Όμως $h(0)=f(0)-0=3>0$ άρα

$h(x)>0$, $x\in\Re$ και $f(x)>x$, $x\in\Re$. (2).

Από την (1) προκύπτει ότι

$$\left|f(x)-x\right|=\sqrt{x^2+9}\overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(x)-x=\sqrt{x^2+9}\Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+9},\ x\in\Re.$$

Δ4. Έστω $F(x)=\int\limits_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t,\ x\in\Re$.

Είναι $F(x)=\int\limits_c^{x+1} f(t)\mathrm{d}t-\int\limits_c^{x} f(t)\mathrm{d}t,\ x\in\Re$, $c\in\Re$.

και $F'(x)=f(x+1)-f(x),\ x\in\Re$. (1)

$$\text{Όμως } f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}}>\frac{\sqrt{x^2}+x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{|x|+x}{\sqrt{x^2+9}}\geq 0,\quad x\in\Re.$$

Δηλαδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Re$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

Προκύπτει έτσι: $x<x+1\Rightarrow f(x)<f(x+1)\Rightarrow f(x+1)-f(x)>0,\ x\in\Re$. (2)

Λόγω των (1), (2) η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

Επομένως: $x<x+1\Leftrightarrow F(x)<F(x+1)\Leftrightarrow \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t<\int_{x+1}^{x+2} f(t)\mathrm{d}t$.

<u>2η λύση:</u>

Η $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ είναι μια αρχική της f στο $\Re$ και η προς απόδειξη ανισότητα

γράφεται

$$F(x+1)-F(x)<F(x+2)-F(x+1)\Leftrightarrow \frac{F(x+1)-F(x)}{(x+1)-x}<\frac{F(x+2)-F(x+1)}{(x+2)-(x+1)}.$$

Από Θ.Μ.Τ. για την F στα διαστήματα $[x, x + 1]$ και $[x + 1, x + 2]$ προκύπτει ότι υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in (x_1, x_1 + 1)$ και $\xi_2 \in (x + 1, x + 2)$ ώστε

$$\frac{F(x+1)-F(x)}{(x+1)-x} = F'(\xi_1) = f(\xi_1) \text{ και } \frac{F(x+2)-F(x+1)}{(x+2)-(x+1)} = F'(\xi_2) = f(\xi_2).$$

Έτσι αρκεί να δειχθεί $f(\xi_1) < f(\xi_2)$ με $\xi_1 < \xi_2$, ή ισοδύναμα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι:

$$f'(x) = \left(x+\sqrt{x^2+9}\right)' = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}} > \frac{\sqrt{x^2}+x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{|x|+x}{\sqrt{x^2+9}} \geq 0, \text{ για κάθε}$$

$x \in \Re$, δηλαδή $f'(\mathrm{x}) > 0$ για κάθε $x \in \Re$ και η f γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2010 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h}=\frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu x\eta\mu h-\eta\mu x}{h}=$$

$$=\frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu h-\eta\mu x}{h}+\frac{\sigma\upsilon\nu x\eta\mu h}{h}=\eta\mu x\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}+\frac{\eta\mu h}{h}\sigma\upsilon\nu x.$$

Τότε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{x\to 0}\left(\eta\mu x\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}+\frac{\eta\mu h}{h}\sigma\upsilon\nu x\right)=\eta\mu x\cdot 0+1\cdot\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x$$

οπότε $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$ ή $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Α2. Μια συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]** όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R} \text{ και } \lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}.$$

Α3. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει στο $x_0\in A$ ολικό μέγιστο αν για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)\leq f(x_0)$.

Α4. **α.** Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\alpha^x\ln\alpha$, δηλαδή η πρόταση είναι λανθασμένη **(Λ)**.

β. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι αν ορίζονται οι συναρτήσεις τότε δεν ισχύει απαραίτητα ότι fog = gof. Για παράδειγμα αν f(x) = x + 1, g(x) = 2x – 3, έχουμε f(g(x)) = 2x – 2, g(f(x)) = 2x – 1, $x\in\mathbb{R}$ και fog ≠ gof, δηλαδή η πρόταση είναι λανθασμένη **(Λ)**.

γ. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι αν $\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$, δηλαδή η πρόταση είναι σωστή **(Σ)**.

δ. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] και ισχύει f(x) ≥ 0 για κάθε x∈[α, β], τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$, δηλαδή η πρόταση είναι σωστή **(Σ)**.

ε. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι για κάθε $z\in\mathbb{C}$ ισχύει ότι $|z|^2=z\cdot\overline{z}$, δηλαδή η πρόταση είναι σωστή **(Σ)**.

Συνεπώς:

α	β	γ	δ	ε
Λ	Λ	Σ	Σ	Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού $z_1+z_2=-2$, $z_1\cdot z_2=5$ και οι z_1,z_2 είναι οι ρίζες μια δευτεροβάθμιας εξίσωσης, τότε μια τέτοια δευτεροβάθμια εξίσωση θα έχει τη μορφή $z^2-Sz+P=0$, όπου $S=z_1+z_2$, $P=z_1\cdot z_2$, δηλαδή είναι η $z^2+2z+5=0$.

Η εξίσωση αυτή έχει διακρίνουσα $\Delta=-16$ και ρίζες $z_{1,2}=\dfrac{-2\pm i4}{2}=-1\pm 2i$.

Έστω $z_1=-1+2i$ και $z_2=-1-2i$.

Β2. Θέτουμε $w=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$ και $z_1=-1+2i$, $z_2=-1-2i$

στην $|w-z_1|^2+|w-z_2|^2=|z_1-z_2|^2$ οπότε βρίσκουμε:

$$|x+yi-(-1+2i)|^2+|x+yi-(-1-2i)|^2=|-1+2i-(-1-2i)|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |(x+1)+i(y-2)|^2+|(x+1)+i(y+2)|^2=|4i|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}^{\,2}+\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}^{\,2}=\sqrt{4^2}^{\,2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2+(x+1)^2+(y+2)^2=16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-4y+4+x^2+2x+1+y^2+4y+4=16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+4x+2y^2+10=16 \Leftrightarrow 2x^2+4x+2y^2+10-16=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+4x+2y^2-6=0 \Leftrightarrow x^2+2x+y^2-3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+y^2=3 \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2=4 \Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=4,$$

δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι ο κύκλος κέντρου $K(-1,\ 0)$ και ακτίνας $R=2$.

Β3. Θέτουμε $w=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$ οπότε η σχέση $2\,\mathrm{Re}(w)+\mathrm{Im}(w)=0$ δίνει:

$2x+y=0$. Για να βρούμε τους μιγαδικούς w, λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases}(x+1)^2+y^2=4\\ 2x+y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+2x+y^2-3=0\\ y=-2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+2x+(-2x)^2-3=0\\ y=-2x\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+2x+4x^2-3=0\\ y=-2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x^2+2x-3=0 & \text{(I)}\\ y=-2x & \text{(II)}\end{cases}$$

Η (Ι) είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=64$ και ρίζες

$$x=\frac{-2\pm 8}{10} \Leftrightarrow x=\frac{-2+8}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5} \text{ ή } x=\frac{-2-8}{10}=\frac{-10}{10}=-1.$$

- Αν $x=\frac{3}{5}$ από την (ΙΙ) βρίσκουμε ότι: $y=-\frac{6}{5}$, άρα $w=\frac{3}{5}-\frac{6}{5}i$.
- Αν $x=-1$ από την (ΙΙ) βρίσκουμε ότι: $y=2$, άρα $w=1+2i$.

Β4. Έστω Α, Β οι εικόνες των μιγαδικών w_1, w_2.

Αφού $|w_1-w_2|=4$, έχουμε ότι $\left|\vec{OA}-\vec{OB}\right|=4 \Leftrightarrow \left|\vec{BA}\right|=2R$,

όπου R η ακτίνα του κύκλου του ερωτήματος Β2.

Συνεπώς τα σημεία Α, Β είναι άκρα διαμέτρου του κύκλου με κέντρο $K(-1, 0)$ και ακτίνα $R = 2$.

Τότε:

$$|w_1+w_2|=\left|\vec{OA}+\vec{OB}\right|=2\left|\vec{OK}\right|=2\cdot\sqrt{(-1-0)^2+(0-0)^2}=2\cdot 1=2.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x > 0$ έχουμε ότι:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}[(x-2)\ln x+x-3]=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-3)=-3$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-2)=-2$.

Συνεπώς η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $x = 0$.

Για $x > 0$ έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)\ln x+x-3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x}\ln x+\frac{x}{x}-\frac{3}{x}\right)=$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x+1-\frac{3}{x}\right)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)=1$.

Επομένως η γραφική παράσταση της f δεν έχει πλάγια (άρα και οριζόντια ασύμπτωτη).

Γ2. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα των δύο φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων $x - 3$ (πολυωνυμική) και $(x - 2)\ln x$ (γινόμενο δύο φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με

$f'(x)=\ln x+\frac{x-2}{x}+1=\ln x+1-\frac{2}{x}+1=\ln x+2-\frac{2}{x}$ και

$f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$.

Όμως $f''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Η $f'(x) = 0$ έχει προφανή ρίζα το 1, αφού $f'(1)=\ln 1+2-\frac{2}{1}=0+2-2=0$, άρα αυτή θα είναι και μοναδική αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Τότε:

- ❖ Για 0 < x < 1 έχουμε ότι $f'(x) < f'(1) = 0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0, 1] και
- ❖ Για x > 1 έχουμε ότι $f'(x) > f'(1) = 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο [1, +∞).

Γ3. Για x > 0 έχουμε ότι:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}[(x-2)\ln x + x - 3] = +\infty$, αφού $\lim_{x\to+\infty}(x-3) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty}(\ln x) = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$.

Τότε:

- Αν $x \in A_1 = (0,1]$ όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε ότι $f(A_1) = [f(1), \lim_{x\to0^+} f(x)) = [-2,+\infty)$, όπου το $0 \in f(A_1)$, δηλαδή η εξίσωση f(x) = 0 έχει λύση στο A_1 και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι μοναδική ρίζα της f(x) = 0 στο A_1.
- Αν $x \in A_2 = (1,+\infty)$ όπου η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε ότι $f(A_2) = (\lim_{x\to1^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = [-2,+\infty)$, όπου το $0 \in f(A_2)$, δηλαδή η εξίσωση f(x) = 0 έχει λύση στο A_2 και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα είναι μοναδική ρίζα της f(x) = 0 στο A_2.

Αφού $A_1 \cup A_2 = (0,+\infty)$ η εξίσωση f(x) = 0 έχει δύο ακριβώς ρίζες, μία στο διάστημα (0, 1] και μία στο (1, +∞).

Γ4. Θέτουμε $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ με x > 0.

- Η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2] \subseteq (0,+\infty)$ ως πηλίκο των συνεχών συναρτήσεων x (πολυωνυμική) και f(x) (δείξαμε στο Γ2 ότι είναι παραγωγίσιμη, άρα είναι και συνεχής),
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(x_1, x_2) \subseteq (0,+\infty)$ ως πηλίκο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων x (πολυωνυμική) και f(x) (δείξαμε στο Γ2 ότι είναι παραγωγίσιμη), με $g'(x) = \dfrac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$,
- $g(x_1) = \dfrac{f(x_1)}{x_1} = \dfrac{0}{x_1} = \dfrac{0}{x_2} = \dfrac{f(x_2)}{x_2} = g(x_2)$,

  οπότε από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (0,+\infty)$ έτσι ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f'(\xi)\xi - f(\xi)}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)\xi - f(\xi) = 0$ **(I)**.

Η εφαπτομένη στο $M(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση:

$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = f'(\xi)x - \xi f'(\xi) + f(\xi) \Leftrightarrow y = f'(\xi)x$, λόγω της (I), οπότε διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι κυρτή, οπότε η f΄ είναι γνησίως αύξουσα.

- Για x > 0 και αφού η f΄ είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει f΄(x) > f΄(0) = 0, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0, +∞).
- Για x < 0 και αφού η f΄ είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει f΄(x) < f΄(0) = 0, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (−∞, 0].

Συνεπώς η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x = 0 το f(0) = 1, οπότε ισχύει

$f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 1.$

Δ2. Για το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(xt)dt$ θέτουμε $u = xt$, οπότε $du = xdt$ και αν $t = 0$ έχουμε $u = 0$ και αν $t = 1$ έχουμε $u = x$. Συνεπώς:

$$x \cdot \int_0^1 f(xt)dt = \int_0^1 f(xt)xdt = \int_0^x f(u)du.$$

Τότε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x \cdot \int_0^1 f(xt)dt + x^3}{\eta\mu^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du + x^3}{\eta\mu^3 x} \overset{\text{De L'Hospital}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3x^2}{3\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3\sigma\upsilon\nu x}\cdot \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3x^2}{\eta\mu^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{3\sigma\upsilon\nu x}\cdot \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu^2 x}+\frac{3x^2}{\eta\mu^2 x}\right)\right] = +\infty,$$

δεδομένου ότι

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3\sigma\upsilon\nu x} = \dfrac{1}{3}$,
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{\eta\mu^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[3\left(\dfrac{x}{\eta\mu x}\right)^2\right] = 3\cdot 1^2 = 3$,
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu^2 x} = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu^2 x) = 0$, $\eta\mu^2 x > 0$ για x κοντά στο 0,

  $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$ (αφού η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής).

Δ3. Έχουμε ότι:

$$\int e^{-x^2}2x(x^2-1)dx = \int\left(-e^{-x^2}\right)'(x^2-1)dx =$$

$$= -e^{-x^2}(x^2-1) - \int\left(-e^{-x^2}\right)2xdx = -e^{-x^2}(x^2-1) - e^{-x^2} + c =$$

$$= -e^{-x^2}(x^2-1+1) + c = -e^{-x^2}x^2 + c, c\in\mathbb{R}.$$

Συνεπώς:

$$f'(x)+2x = 2x(f(x)+x^2) \Leftrightarrow f'(x)+2x = 2xf(x)+2x^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)-2xf(x) = 2x^3-2x \Leftrightarrow e^{-x^2}(f'(x)-2xf(x)) = e^{-x^2}(2x^3-2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x^2}f'(x) - 2xe^{-x^2}f(x) = e^{-x^2}2x(x^2-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{-x^2}f(x)\right)' = e^{-x^2}2x(x^2-1) \Leftrightarrow e^{-x^2}f(x) = \int e^{-x^2}2x(x^2-1)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x^2}f(x) = -e^{-x^2}x^2 + c \Leftrightarrow f(x) = -x^2 + ce^{x^2}, c\in\mathbb{R}.$$

Αφού f(0) = 1, έχουμε για x = 1, ότι:

$$f(0) = -0^2 + ce^{0^2} \Leftrightarrow 1 = -0 + c \Leftrightarrow c = 1.$$

Επομένως: $f(x) = -x^2 + e^{x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ4. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = -2x + 2xe^{x^2} = 2x\left(e^{x^2}-1\right).$$

Το πρόσημο της παραγώγου φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

	$-\infty$	0	$+\infty$
$2x$	$-$		$+$
e^{x^2}	$-$		$+$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

Επομένως και αφού η συνάρτηση f(t) είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$), άρα και στο 0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επίσης συνάρτηση f(t) είναι συνεχής στο $[0,+\infty) \subseteq \mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$), οπότε ορίζεται η συνάρτηση $h(x)=\int_{x}^{x+2} f(t)dt$ και είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=f(x+2)-f(x)$.

Αφού $x + 2 > x \geq 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, ισχύει $f(x + 2) > f(x) \Leftrightarrow h'(x) > 0$, δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Η δοσμένη ανίσωση γίνεται:

$$\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt+\int_{6}^{4} f(t)dt<0 \Leftrightarrow \int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt-\int_{4}^{6} f(t)dt<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt<\int_{4}^{6} f(t)dt \Leftrightarrow h(x^2+2x+1)<h(4) \quad \textbf{(I)}$$

Αν $x^2+2x+1 \geq 4$ και αφού η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, θα ισχύει $h(x^2+2x+1) \geq h(4)$, που είναι άτοπο λόγω της (Ι),

οπότε $x^2+2x+1<4 \Leftrightarrow x^2+2x+1-4<0 \Leftrightarrow x^2+2x-3<0 \Leftrightarrow -3<x<1$, αφού η δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2+2x-3=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 16$ και ρίζες $x=\frac{-2\pm 4}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-2+4}{2}=\frac{2}{2}=1$ ή $x=\frac{-2-4}{2}=\frac{-6}{2}=-3$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 2011

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη στη σελίδα 260 – 261.

Α2. Ορισμός στη σελίδα 280.

Α3. **α** $\rightarrow \Sigma$
β $\rightarrow \Sigma$
γ $\rightarrow \Lambda$
δ $\rightarrow \Lambda$
ε $\rightarrow \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

Β1. $|z-3i|+|\overline{z}+3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|+|\overline{z-3i}|=2 \Leftrightarrow$

$|z-3i|+|z-3i|=2 \Leftrightarrow 2|z-3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|=1$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο

$K(0,\ 3)$, ακτίνα $\rho=1$ και εξίσωση $C:\ x^2+(y-3)^2=1$

<u>β’ τρόπος</u>
$|z-3i|+|\overline{z}+3i|=2 \qquad z=x+yi\,,\ \ x,\ y\in R$

$$|x+(y-3)i|+|x+(3-y)i|=2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{x^2+(3-y)^2}=2 \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x^2+(y-3)^2}=2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-3)^2}=1 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο

$K(0,\ 3)$ και ακτίνα $\rho=1$.

B2. $|z-3i|=1 \Leftrightarrow |z-3i|^2=1 \Leftrightarrow (z-3i)\left(\overline{z-3i}\right)=1 \Leftrightarrow$

$$(z-3i)(\overline{z}+3i)=1 \overset{z\neq 3i}{\Leftrightarrow} \overline{z}+3i=\frac{1}{z-3i}$$

B3. $w=z-3i+\dfrac{1}{z-3i} \overset{B2}{\Leftrightarrow} w=z-3i+\overline{z}+3i \Leftrightarrow$

$$w=z+\overline{z} \overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow} w=2x \quad \in R$$

$$x^2+(y-3)^2=1 \Leftrightarrow (y-3)^2=1-x^2$$

και επειδή $(y-3)^2 \geq 0$ θα είναι:

$$1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq w \leq 2$$

B4. Για $z=x+yi$ είναι $w=2x$

$$|z-w|=|z| \Leftrightarrow |x+yi-2x|=|x+yi| \Leftrightarrow$$

$$|-x+yi|=|x+yi| \Leftrightarrow \sqrt{(-x)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow$$

$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2}$ που ισχύει

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εξ υποθέσεως για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x) \Leftrightarrow$$

$$e^x f'(x)+e^x f''(x)-e^x=f'(x)+xf''(x) \Leftrightarrow$$

$$\left(e^x\right)' f'(x)+e^x\cdot\left(f'(x)\right)'-\left(e^x\right)'=x'\cdot f'(x)+x\left(f'(x)\right)' \Leftrightarrow$$

$$\left(e^x f'(x)\right)'-\left(e^x\right)'=\left(xf'(x)\right)' \Leftrightarrow$$

$$\left(e^x f'(x)-e^x\right)'=\left(xf'(x)\right)' \Leftrightarrow$$

$$e^x f'(x)-e^x=xf'(x)+c \qquad (1)$$

Για $x=0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f'(0)-1=c$ και αφού $f'(0)=0 \Rightarrow c=-1$

Άρα $e^x f'(x)-e^x=xf'(x)-1 \Leftrightarrow$

$$e^x f'(x)-xf'(x)=e^x-1 \Leftrightarrow \left(e^x-x\right)\cdot f'(x)=e^x-1 \qquad (2)$$

Θα δείξουμε ότι $e^x-x\neq 0$ για κάθε $x\in R$ και συγκεκριμένα ότι $e^x-x>0$ για κάθε $x\in R$.

Θέτουμε $t(x)=e^x-x / A_t=R \qquad t'(x)=e^x-1 / A_{t'}=A_t=R$

$$t'(x)=0 \Leftrightarrow e^x=e^0 \overset{e^x\, 1-1}{\Leftrightarrow} x=0$$

$$t'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>e^0 \overset{e^x \uparrow /R}{\Leftrightarrow} x>0$$

$$t'(x)<0 \Leftrightarrow e^x-1<0 \Leftrightarrow e^x<e^0 \overset{e^x \uparrow /R}{\Leftrightarrow} x<0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$t'(x)$	$-$	0	$+$
t	$\searrow$	ΟΛ.ΕΛ.	$\nearrow$

Άρα η t παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=0$ το $t(0)=1>0$.

Άρα $t(x)>0$ για κάθε $x \in R$.

<u>Παρατήρηση:</u>
Θα μπορούσε η αντίστοιχη ανισότητα να λυθεί και με χρήση Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση $h(x)=e^x/R$ στο $[0,\ x]$ ή αποδεικνύοντας ότι η h είναι κυρτή στο R οπότε η C_h θα είναι πάνω από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο. Η εφαπτομένη της C_h στο $A(0,\ 1)$ έχει εξίσωση $\varepsilon:\ \psi=x+1$. Άρα για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$e^x \geq x+1 \Leftrightarrow e^x - x \geq 1 > 0$$

Άρα $f'(x)(e^x-x)=e^x-1 \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x} \Leftrightarrow$

$$f'(x)=\frac{(e^x-x)'}{e^x-x} \Leftrightarrow f'(x)\left(\ln\left|e^x-x\right|\right)' \overset{e^x-x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$f'(x)=\left(\ln\left(e^x-x\right)\right)' \Leftrightarrow f(x)=\ln\left(e^x-x\right)+c$$

Για $x=0$ έχουμε $f(0)=\ln 1+c=c$.

Αφού $f(0)=0 \Rightarrow c=0$

Άρα $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)$

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=e^0 \overset{e^x\ 1-1}{\Leftrightarrow} x=0$$

$$f'(x)>0 \overset{e^x-x>0}{\Leftrightarrow} e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>e^0 \overset{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} x>0$$

$$f'(x)<0 \overset{e^x - x>0}{\Leftrightarrow} e^x - 1<0 \Leftrightarrow e^x < e^0 \overset{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} x<0$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)<0 \text{ για κάθε } x\in(-\infty,\ 0) \\ \quad f \text{ συνεχής στο } (-\infty,\ 0] \end{array}\right\} \Rightarrow f \downarrow \quad (-\infty,\ 0]$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(0,\ +\infty) \\ \quad f \text{ συνεχής στο } [0,\ +\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow f \uparrow \quad [0,\ +\infty)$$

Άρα η f παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ ολικό ελάχιστο το $f(0)=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	ΟΛ.ΕΛ. $f(0)=0$	$\nearrow$

Γ3. $$f''(x)=\left(\frac{e^x-1}{e^x-x}\right)' = \frac{(e^x-1)'(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-x)'}{(e^x-x)^2} =$$

$$=\frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)^2}{(e^x-x)^2} = \frac{e^{2x}-xe^x-e^{2x}+2e^x-1}{(e^x-x)^2} = \frac{-xe^x+2e^x-1}{(e^x-x)^2}$$

$(e^x-x)^2>0$ για κάθε $x\in R$

Θέτουμε $t(x)=-xe^x+2e^x-1$ / $A_t=R$

$t'(x)=-e^x-xe^x+2e^x=e^x-xe^x=(1-x)\cdot e^x$

$t'(x)=0 \Leftrightarrow x=1 \qquad t'(x)>0 \Leftrightarrow x<1 \qquad t'(x)<0 \Leftrightarrow x>1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
t		$\nearrow$	ΟΛ.Μ.	$\searrow$	

Η t παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=1$ το $t(1)=e-1>0$

$t(2)=-1<0$, $\quad t(-2)=\dfrac{4}{e^2}-1<0$

Η t συνεχής στο R, άρα και στα διαστήματα $[-2,\ 1]$, $[1,\ 2]$

$t(-2)t(1)<0$ και $t(1)t(2)<0$

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχουν $x_1 \in (-2,\ 1)$ και $x_2 \in (1,\ 2)$ τέτοια ώστε $t(x_1)=t(x_2)=0$

Η ύπαρξη των ριζών της t θα μπορούσε να εξασφαλιστεί και με χρήση συνόλου τιμών της t.

Αφού t $\uparrow$ / $(-\infty,\ 1]$, η (ε) $t(x)=0$ θα έχει το πολύ μία ρίζα στο $(-\infty,\ 1)$.

Ομοίως t $\downarrow$ / $[1,\ +\infty)$, άρα η (ε) $t(x)=0$ θα έχει το πολύ μία ρίζα στο $(1,\ \infty)$.

Άρα η (ε) $t(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες εκατέρωθεν των οποίων η t αλλάζει πρόσημο.

Αφού $f''(x)=\dfrac{t(x)}{(e^x-x)^2}$, η f θα έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Γ4. (ε) $\ln(e^x-x)=\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \ln(e^x-x)-\sigma\upsilon\nu x=0$.

Θέτουμε $\Phi(x)=\ln(e^x-x)-\sigma\upsilon\nu x$ / $A_\Phi=R$ ή $A_\Phi=\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$

Η Φ συνεχής στο $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ ως πράξη συνεχών

$\Phi(0)=\ln 1-\sigma\upsilon\nu 0=-1<0$

$\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\right)>0$ αφού $f(x)>0$ για κάθε $x\in R^*$

Άρα $\Phi(0)\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$, οπότε από Θεωρ. Bolzano υπάρχει: $x_0\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right):\Phi(x_0)=0$

Άρα η ζητούμενη (ε) έχει μία τουλάχιστο ρίζα στο $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$

Η Φ είναι παραγωγίσιμη στο A_Φ με:

$\Phi'(x)=f'(x)+\eta\mu x$

$$\left.\begin{array}{r}\Phi'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right] \\ \Phi \text{ συνεχής στο } \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]\end{array}\right\}\Rightarrow \Phi\uparrow\ /\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

Άρα η (ε) $\Phi(x)=0$ θα έχει το πολύ μία ρίζα στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$,

οπότε τελικά η ζητούμενη (ε) θα έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε $u=x+t\Leftrightarrow t=u-x$ και $dt=du$

Για $t=0\Leftrightarrow u=x$, για $t=-x\Leftrightarrow u=0$

Άρα $\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt=\int_x^0\frac{e^{2(u-x)}}{g(u)}du=\int_x^0\frac{e^{2u-2x}}{g(u)}du=$

$=\int_0^x\frac{e^{2u}\cdot e^{-2x}}{g(u)}du=-e^{-2x}\cdot\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du$.

Άρα η δοθείσα σχέση γίνεται:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=-e^{-2x}\cdot\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du\Leftrightarrow 1-f(x)=-\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du\Leftrightarrow$$

$$f(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du$$

Θέτουμε $h(u)=\dfrac{e^{2u}}{g(u)}$ / $Ah=R$.

Η h είναι συνεχής στο R ως πηλίκο συνεχών.

Άρα η συνάρτηση f θα είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=\dfrac{e^{2x}}{g(x)}$.

Αντίστοιχα και η g είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x)=\dfrac{e^{2x}}{f(x)}$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{e^{2x}}{g(x)}\Leftrightarrow e^{2x}=g(x)\cdot f'(x) \\ g'(x)=\dfrac{e^{2x}}{f(x)}\Leftrightarrow e^{2x}=f(x)\cdot g'(x)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$f'(x)g(x)=f(x)g'(x)\overset{f(x)>0,\ g(x)>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{g'(x)}{g(x)}\overset{f(x)>0,\ g(x)>0}{\Leftrightarrow}\left(\ln(f(x))\right)'=\left(\ln(g(x))\right)'\Leftrightarrow$$

$$\ln(f(x))=\ln(g(x))+c \qquad (1)$$

Στις δοθείσες σχέσεις για $x=0$ προκύπτουν:

$$\frac{1-f(0)}{e^0}=1\Leftrightarrow f(0)=1 \text{ και } \frac{1-g(0)}{e^0}=1\Leftrightarrow g(0)=1$$

Για $x=0\overset{(1)}{\rightarrow}\ln1+\ln1=c\Leftrightarrow c=0$

Άρα $\ln(f(x))=\ln(g(x))\overset{\ln x\ 1-1}{\Leftrightarrow}f(x)=g(x)$

β’ τρόπος

Ομοίως $f'(x)\cdot g(x)=f(x)g'(x)\Leftrightarrow f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=0$

$$\overset{g(x)>0\Rightarrow g(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}\ \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=0\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0\Leftrightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=c\Leftrightarrow f(x)=c\cdot g(x)$$

Ομοίως για $x=0$ έχομε: $\left.\begin{matrix} f(0)=g(0)=1 \\ f(0)=c\cdot g(0)\end{matrix}\right|\Rightarrow c=1$

Άρα $f(x)=g(x)$

Δ2. $\left.\begin{matrix} f'(x)\cdot g(x)=e^{2x} \\ f(x)=g(x)\end{matrix}\right|\Rightarrow f'(x)\cdot f(x)=e^{2x}\Leftrightarrow$

$$2f'(x)f(x)=2e^{2x}\Leftrightarrow\left(f^2(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)'$$

Άρα $f^2(x)=e^{2x}+c \qquad (1)$

$\left.\begin{matrix} \text{Για } x=0\overset{(1)}{\rightarrow}f^2(0)=1+c \\ \text{Αφού } f(0)=1\end{matrix}\right|\Rightarrow c=0$

Άρα $f^2(x)=e^{2x}\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}f(x)=e^x$

Δ3. Θέτουμε $u=\frac{1}{x}$. Αφού $x\to 0^-\Rightarrow u\to-\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{\ln f\left(\frac{1}{u}\right)}{f(u)}=\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{\ln e^{\frac{1}{u}}}{e^u}=$

$$= \lim_{u\to-\infty} \frac{\frac{1}{u}}{e^u} = \lim_{u\to-\infty} \frac{1}{u\cdot e^u} = \lim_{u\to-\infty} \frac{e^{-u}}{u} \underset{PLH}{\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}}$$

$$= \lim_{u\to-\infty} \frac{\left(e^{-u}\right)'}{(u)'} = \lim_{u\to-\infty}\left(-e^{-u}\right) = -\infty$$

Δ4. Αφού η f είναι συνεχής στο R, η F θα είναι παραγωγίσιμη στο R με $F'(x) = f\left(x^2\right)$,

αφού και η $g(t) = f\left(t^2\right)$ θα είναι συνεχής στο R ως σύνθεση συνεχών.

Αφού η F είναι παραγωγίσιμη στο R θα είναι και συνεχής. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν

θα ισούται με $E = \int_0^1 |F(x)|dx$.

Αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ θα ισχύει $F(x) \le 0$ στο $[0,\ 1]$.

Άρα $E = \int_0^1 -F(x)dx = -\int_0^1 F(x)dx = -\int_0^1 x'\cdot F(x)dx =$

$$= -\left[x\cdot F(x)\right]_0^1 + \int_0^1 x\cdot F'(x)dx = -F(1) + \int_0^1 xf\left(x^2\right)dx =$$

$$= -0 + \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x\cdot e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{x^2}\right)' dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1) \quad \text{τ.μ.}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2011 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω συνάρτηση $f(x)=\text{συν}x$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\text{συν}(x+h)-\text{συν}x}{h}=\frac{\text{συν}x\,\text{συν}h-\text{ημ}x\,\text{ημ}h-\text{συν}x}{h}=$$

$$=\frac{\text{συν}x\,\text{συν}h-\text{συν}x}{h}-\frac{\text{ημ}x\,\text{ημ}h}{h}=\text{συν}x\frac{\text{συν}h-1}{h}-\frac{\text{ημ}h}{h}\text{ημ}x.$$

Τότε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{x\to 0}\left(\text{συν}x\frac{\text{συν}h-1}{h}-\frac{\text{ημ}h}{h}\text{ημ}x\right)=\text{συν}x\cdot 0-1\cdot\text{ημ}x=-\text{ημ}x$$

οπότε $f'(x)=-\text{ημ}x$ ή $(\text{συν}x)'=-\text{ημ}x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Α2. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f**, ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Α3. **α.** Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι για τον μιγαδικό $z=\alpha+\beta i,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ισχύει $z-\overline{z}=2\,\text{Im}(z)i=2\beta i$, δηλαδή η πρόταση είναι λανθασμένη **(Λ)**.

β. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ ολικό μέγιστο το $f(x_0)$, όταν ισχύει $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A$, δηλαδή η πρόταση είναι σωστή **(Σ)**.

γ. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι και 1 – στο διάστημα αυτό, δηλαδή η πρόταση είναι σωστή **(Σ)**.

δ. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$, δηλαδή η πρόταση είναι σωστή **(Σ)**.

ε. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό, χωρίς να ισχύει το αντίστροφο, δηλαδή η πρόταση είναι λανθασμένη **(Λ)**.

Συνεπώς:

α	β	γ	δ	ε
Λ	Σ	Σ	Σ	Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θέτουμε $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$.

Τότε η $|z - i| = 1 + \mathrm{Im}(z)$ γίνεται $|x + (y-1)i| = 1 + y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 1 + y$ **(I)**

- Αν $1 + y < 0 \Leftrightarrow y < -1$, η (Ι) είναι αδύνατη.
- Αν $1 + y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -1$, η (Ι) γίνεται:

$$x^2 + (y-1)^2 = (1+y)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 + 2y + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = -y^2 + 2y - 1 + 1 + 2y + y^2 \Leftrightarrow x^2 = 4y \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x^2$$, η οποία είναι εξίσωση παραβολής με άξονα συμμετρίας τον x΄x.

Β2. Η σχέση $w\left(\overline{w} + 3i\right) = i\left(3\overline{w} + i\right)$ γράφεται:

$$w\overline{w} + 3wi = 3i\overline{w} + i^2 \Leftrightarrow w\overline{w} + 3wi - 3i\overline{w} - i^2 = 0 \Leftrightarrow w\overline{w} + 3i\left(w - \overline{w}\right) + 1 = 0.$$

Θέτουμε $w = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$, οπότε βρίσκουμε:

$$x^2 + y^2 + 3i \cdot 2yi + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6y + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6y + 9 = 8 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 = 8$, η οποία είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο Κ(0, 3) και ακτίνα $R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Β3. Οι συντεταγμένες των σημείων Α, Β του μιγαδικού επιπέδου προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων της παραβολής του Β1 ερωτήματος και του κύκλου του Β2 ερωτήματος, δηλαδή:

$$\begin{cases} x^2 = 4y \\ x^2 + y^2 - 6y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4y \\ 4y + y^2 - 6y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4y \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4y \\ (y-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4y \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \cdot 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Συνεπώς: Α(2, 1) και Β(−2, 1).

Β4. Έχουμε ότι:

$$KA = \sqrt{(2-0)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

$$KB = \sqrt{(-2-0)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

δηλαδή ΚΑ = ΚΒ οπότε το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές.

Επίσης:

$$\lambda_{KA} = \frac{3-1}{0-2} = \frac{2}{-2} = -1 \text{ και } \lambda_{KB} = \frac{3-1}{0-(-2)} = \frac{2}{2} = 1,$$

δηλαδή $\lambda_{KA} \cdot \lambda_{KB} = -1$, δηλαδή το τρίγωνο ΚΑΒ είναι και ορθογώνιο.

Αν Μ είναι το μέσο του ΑΒ, έχουμε ότι: $M\left(\frac{2-2}{2},\frac{1+1}{2}\right)$ ή Μ(0, 1).

Αναζητούμε σημείο Λ(α, β) ώστε το Μ να είναι το μέσο του ΚΛ.

Το μέσο του ΚΛ είναι το $M\left(\frac{\alpha+0}{2},\frac{\beta+3}{2}\right)$, οπότε:

$$\begin{cases}\frac{\alpha}{2}=0\\ \frac{\beta+3}{2}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=2\cdot 0\\ \beta+3=2\cdot 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=2-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=-1\end{cases}$$, δηλαδή Λ(0, −1),

οπότε $u = -i$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε ότι $x'(t)=16$, οπότε $x(t)=16t+c$.

Όμως $x(0) = 0$, οπότε $16\cdot 0 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$, άρα $x(t)=16t$.

Γ2. Έστω $f(x)=\sqrt{x}$ η οποία είναι ορισμένη στο [0, +∞) και παραγωγίσιμη στο (0, +∞) με $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Το σημείο Α μέχρι το οποίο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το σημείο επαφής της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το σημείο Π(0, 1). Έστω $A\left(x_0,\sqrt{x_0}\right)$ το σημείο επαφής. Η εφαπτομένη ε έχει εξίσωση: $y-\sqrt{x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)$, όπου το Π την επαληθεύει, άρα:

$$1-\sqrt{x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(0-x_0) \Leftrightarrow 1-\sqrt{x_0}=-\frac{x_0}{2\sqrt{x_0}} \Leftrightarrow 1-\sqrt{x_0}=-\frac{\sqrt{x_0}^2}{2\sqrt{x_0}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{x_0}=-\frac{\sqrt{x_0}}{2} \Leftrightarrow 1=\sqrt{x_0}-\frac{\sqrt{x_0}}{2} \Leftrightarrow 1=\frac{\sqrt{x_0}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x_0}=2 \Leftrightarrow x_0=4.$$

Συνεπώς: $A\left(4,\sqrt{4}\right)$ ή Α(4, 2).

Η χρονική στιγμή μέχρι την οποία ο παρατηρητής έχει επαφή με το κινητό, δίνεται από την λύση της εξίσωσης: $x(t) = 4 \Leftrightarrow 16t = 4 \Leftrightarrow t=\frac{4}{16} \Leftrightarrow t=\frac{1}{4}\text{ min}$.

Γ3. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α έχει εξίσωση:

$$y-2=\frac{1}{2\sqrt{4}}(x-4) \Leftrightarrow y-2=\frac{1}{4}(x-4) \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x-\frac{4}{4}+2 \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x+1.$$

Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (0, +∞) με

$f''(x)=\dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x}=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$, οπότε είναι κοίλη, αφού $f''(x)<0$.

Αυτό σημαίνει ότι κάθε εφαπτομένη είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f εκτός από το σημείο επαφής, οπότε $\frac{1}{4}x+1\geq\sqrt{x}$

Το εμβαδό του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το Ο μέχρι το Α είναι:

$$E=\int_0^4\left(\frac{1}{4}x+1-\sqrt{x}\right)dx=\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2}+x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{4^2}{8}+4-\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}=$$

$$=\frac{16}{8}+4-\frac{2}{3}\cdot 2^3=2+4-\frac{16}{3}=6-\frac{16}{3}=\frac{18}{3}-\frac{16}{3}=\frac{2}{3}\text{ τ.μ.}$$

Γ4. Έστω $M\left(x,\sqrt{x}\right)$ με $x\geq 0$ ένα σημείο της C_f.

Τότε $M\left(16t,\sqrt{16t}\right)$ με $t\geq 0$ και $(\Pi M)=\sqrt{(16t-0)^2+\left(\sqrt{16t}-1\right)^2}$.

Έστω $d(t)=\sqrt{256t^2+\left(4\sqrt{t}-1\right)^2}=\sqrt{256t^2+16t-8\sqrt{t}+1}$.

Η d(t) είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων,

με $d'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{256t^2+16t-8\sqrt{t}+1}}\cdot\left(2\cdot 256t+16-8\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\right)=$

$=\dfrac{1}{\sqrt{256t^2+16t-8\sqrt{t}+1}}\cdot\left(256t+8-\dfrac{2}{\sqrt{t}}\right)$.

Θέτουμε $a(t)=256t+8-\frac{2}{\sqrt{t}}$, $t\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ (ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με

$$a'(t)=256-\frac{-2\frac{1}{2\sqrt{t}}}{t}=256+\frac{1}{t\sqrt{t}}.$$

Ισχύει $a'(t)>0$, άρα η a(t) είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{1}{4}\right)$,

με $a(A)=\left(\lim\limits_{t\to 0^+}a(t),a\left(\frac{1}{4}\right)\right]=\left(-\infty,68\right]$, δηλαδή $0\in a(A)$.

Συνεπώς η εξίσωση $a(t)=0$ έχει ρίζα $t_0\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ και αφού η a(t) είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{1}{4}\right)$, η ρίζα είναι μοναδική.

Τότε:

- για $t\in\left(0,t_0\right)$, δηλαδή $t<t_0$ έχουμε $a(t)<a(t_0)\Leftrightarrow a(t)<0\Leftrightarrow d'(t)<0$, δηλαδή η d(t) είναι γνησίως φθίνουσα στο $t\in(0,t_0]$ και
- για $t\in\left(t_0,\frac{1}{4}\right)$, δηλαδή $t>t_0$ έχουμε $a(t)>a(t_0)\Leftrightarrow a(t)>0\Leftrightarrow d'(t)>0$,

  δηλαδή η d(t) είναι γνησίως αύξουσα στο $t\in\left[t_0,\frac{1}{4}\right)$.
- άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $t=t_0\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

Επομένως υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ κατά την οποία η απόσταση d = (ΠΜ) γίνεται ελάχιστη.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω $h(x) = \frac{f(x)}{x}$, οπότε $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 1 + f(0)$.

Τότε $f(x) = x \cdot h(x)$ και αφού $\lim\limits_{x \to 0}\big(xh(x)\big) = 0 \cdot (1 + f(0)) = 0$,

οπότε και $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε και συνεχής στο 0, οπότε $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

Επίσης:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + f(0) = 1$, άρα $f'(0) = 1$.

Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$,

δηλαδή στο (0, 0) έχει εξίσωση: $y - 0 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x$.

Δ2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0, 1] ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (0, 1), ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,

οπότε από το Θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού υπάρχει $\xi \in (0, 1)$

έτσι ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0)$.

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $f'(0) < f(1) - f(0)$, οπότε $f'(0) < f'(\xi)$ **(Ι)**

Αφού η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,

ισχύει ότι η f'' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και αφού $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

θα ισχύει $f''(x) > 0$ ή $f''(x) < 0$,

δηλαδή η f' είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Όμως $0 < \xi$ και ισχύει η (Ι), οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Αυτό σημαίνει ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Η συνάρτηση g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως διαφορά των δύο φορές παραγωγίσιμων στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεων f (δύο φορές παραγωγίσιμη από την υπόθεση) και x (δύο φορές παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική), με $g'(x) = f'(x) - 1$ και $g''(x) = f''(x)$, όπου $f''(x) > 0$ (ερώτημα Δ2), οπότε $g''(x) > 0$.

Συνεπώς η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα και η εξίσωση $g'(x) = 0$ έχει προφανή ρίζα το 0, η οποία θα είναι μοναδική.

Τότε:

- Για $x > 0$ έχουμε $g'(x) > g'(0) = 0$, δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, ενώ
- Για $x < 0$ έχουμε $g'(x) < g'(0) = 0$, δηλαδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Επομένως η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x = 0, το $g(0) = f(0) - 0 = 0$.

Επίσης η g ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι και συνεχής σε αυτό, οπότε και στο 0, δηλαδή ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(0) = 0$, όπου $g(x) \geq g(0) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (αφού παρουσιάζει ελάχιστο το 0 για x = 0).

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{g(x)}=+\infty$, άρα

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\eta\mu x g(x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\eta\mu x}\cdot\frac{1}{g(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\eta\mu x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{g(x)}=+\infty .$$

Δ4. Έχουμε $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0, 2]$, χωρίς να είναι παντού μηδέν, οπότε

$$\int_0^2 g(x)dx>0 \Leftrightarrow \int_0^2 (f(x)-x)dx>0 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx-\int_0^2 xdx>0 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx>\int_0^2 xdx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx>\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx>\frac{2^2}{2}-\frac{0^2}{2} \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx>\frac{4}{2}-\frac{0}{2} \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx>2 .$$

Δ5. Έχουμε $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0, 1]$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό $E(\Omega)$ είναι:

$$E(\Omega)=\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 (f(x)-x)dx=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 xdx=\int_0^1 f(x)dx-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 ,$$

οπότε $e-\dfrac{5}{2}=\displaystyle\int_0^1 f(x)dx-\left(\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right) \Leftrightarrow e-\frac{5}{2}=\int_0^1 f(x)dx-\left(\frac{1}{2}-\frac{0}{2}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e-\frac{5}{2}=\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{2} \Leftrightarrow e-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx=e-\frac{4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx=e-2 .$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt-2$, με $x\in[0, 2]$.

Η $\varphi(x)$ είναι συνεχής στο $[0, 2]$, αφού είναι παραγωγίσιμη σε αυτό,

$$\varphi(1)=\int_0^1 f(t)dt-2=e-2-2=e-4<0$$

$\varphi(2)=\int_0^2 f(t)dt-2>0$ (από το ερώτημα Δ4), δηλαδή $\varphi(1)\cdot\varphi(2)<0$

και από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi\in(1, 2)$ έτσι, ώστε

$$\varphi(\xi)=0 \Leftrightarrow \int_0^\xi f(t)dt-2=0 \Leftrightarrow \int_0^\xi f(t)dt=2 .$$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ Ο.Ε.Φ.Ε.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Β. **α) Λάθος** διότι η f είναι «1-1» που σημαίνει δεν είναι πάντα γνησίως μονότονη.

β) Σωστό διότι $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$ άρα $f(x)>0$ κοντά στο x_0

γ) Σωστό διότι από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_0\in(a,\beta)$ τέτοιος ώστε:

$$f'(x_0)=\frac{f(a)-f(\beta)}{a-\beta}>0 \text{ διότι } f\uparrow \text{ άρα } f(a)<f(\beta)$$

δ) Λάθος διότι $f''(x)\geq 0, x\in\Delta$. (Παράδειγμα: για την $f(x)=x^4$ είναι:

$$f'(x)=4x^3,\ f''(x)=12x^2\geq 0 \text{ για κάθε } x\in R)$$

ε) Σωστό διότι αν $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_a^\beta f(x)dx=0$ (άτοπο)

στ) Σωστό διότι αν η f δεν παίρνει 2 τουλάχιστον ετερόσημες τιμές θα είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$. Όμως η f δεν είναι παντού ίση με μηδέν, οπότε $\int_a^\beta f(x)dx>0$ άτοπο.

Θέμα 2ο

Α. $A=(0,+\infty)$ πεδίο ορισμού

$$f'(x)=\frac{(\ln(ax))'\cdot\sqrt{x}-\ln(ax)\cdot(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}=\frac{\frac{1}{ax}\cdot(ax)'\cdot\sqrt{x}-\ln(ax)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{\ln(ax)}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\ln(ax)}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\ln(ax)}{2x\sqrt{x}} \qquad (1)$$

Είναι $f'(1)=\frac{2-\ln a}{2}=1\Leftrightarrow 2-\ln a=2\Leftrightarrow \ln a=0\Leftrightarrow a=1$

Β. α) Για α=1 έχουμε:

$$f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}},\; x>0 \;\text{ και }\; f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}},\; x>0$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}=0 \Leftrightarrow \ln x=2 \Leftrightarrow x=e^2$$

x	0	e^2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

$$f\left(e^2\right)=\frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}}=\frac{2}{e}(\max)$$

β) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot \ln x\right]=+\infty(-\infty)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(\sqrt{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$$

Άρα $f\left(\left(0,e^2\right]\right)=\left(-\infty,\frac{2}{e}\right]$ και $f\left(\left[e^2,+\infty\right)\right)=\left[\frac{2}{e},0\right)$

Η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη και η $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη.

γ) $\ln\left(\sqrt{\kappa}\right)^{\sqrt{\kappa+1}}>\ln\left(\sqrt{\kappa+1}\right)^{\sqrt{\kappa}} \Leftrightarrow$

$\sqrt{\kappa+1}\cdot\ln\sqrt{\kappa}>\sqrt{\kappa}\cdot\ln\sqrt{\kappa+1}\Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}\sqrt{\kappa+1}\cdot\ln\kappa>\sqrt{\kappa}\cdot\ln(\kappa+1)\Leftrightarrow$

$\frac{\ln\kappa}{\sqrt{\kappa}}>\frac{\ln(\kappa+1)}{\sqrt{\kappa+1}}\Leftrightarrow$

$f(\kappa)>f(\kappa+1)$ ισχύει διότι

$\kappa+1>\kappa\geq 8>e^2$ και $f\downarrow$ στο $\left[e^2,+\infty\right)$

Θέμα 3ο

Α. α) $z_1=\dfrac{1+\beta-i(a-\beta i)}{1+f(\beta)-i\left[f(a)-i\cdot f(\beta)\right]}=\dfrac{1-i\cdot a}{1-i\cdot f(a)}=$

$$=\frac{(1-i\cdot a)(1+i\cdot f(a))}{\left[1-i\cdot f(a)\right]\cdot\left[1+i\cdot f(a)\right]}=\frac{(1+a\cdot f(a))+i(-a+f(a))}{1+f^2(a)}$$

$z_1\in R$ αν και μόνο αν $-a+f(a)=0\Leftrightarrow f(a)=a$

β) Ισχύει $z=-iw\Leftrightarrow a+\beta i=-i\left(f(a)+i\cdot f(\beta)\right)\Leftrightarrow a+\beta i=f(\beta)-if(a)$ οπότε $f(a)=-\beta$ και $f(\beta)=a$. Άρα $w=-\beta+\alpha\cdot i$. Έστω $A(a,\beta)$ και $B(-\beta,a)$. Είναι $(OA)=\sqrt{a^2+\beta^2},(OB)=\sqrt{a^2+\beta^2}$ δηλαδή $O\overset{\triangle}{A}B$ ισοσκελές.

Επειδή $(AB)^2=(a+\beta)^2+(a-\beta)^2=$

$$=a^2+\beta^2+2a\beta+a^2+\beta^2-2a\beta=2\left(a^2+\beta^2\right)=(OA)^2+(OB)^2$$

το τρίγωνο είναι και ορθογώνιο.

Β. α) Έχουμε $\left|a+\beta i-i\left(f(a)+if(\beta)\right)\right|^2=\left|a+\beta i\right|^2+\left|if(a)-f(\beta)\right|^2$

$$\left|a+f(\beta)+i\left(\beta-f(a)\right)\right|^2=a^2+\beta^2+f^2(a)+f^2(\beta)\Leftrightarrow$$

$$\left(a+f(\beta)\right)^2+\left(\beta-f(a)\right)^2=a^2+\beta^2+f^2(a)+f^2(\beta)\Leftrightarrow$$

$$a^2+f^2(\beta)+2a\cdot f(\beta)+\beta^2+f^2(a)-2\beta\cdot f(a)=a^2+\beta^2+f^2(a)+f^2(\beta)\Leftrightarrow$$

$$2a\cdot f(\beta)-2\beta\cdot f(a)=0\Leftrightarrow a\cdot f(\beta)-\beta\cdot f(a)=0$$

β) Έστω $A(a,\beta)$ και $B\left(f(a),f(\beta)\right)$

$\lambda_{OA}=\dfrac{\beta}{a}$ και $\lambda_{OB}=\dfrac{f(\beta)}{f(\alpha)}$ οι συντελεστές διεύθυνσης ΟΑ και ΟΒ αντίστοιχα

Λόγω της (1) είναι $\lambda_{OA}=\lambda_{OB}$ που σημαίνει Α, Ο, Β συνευθειακά.

(Είναι $f(a)\neq 0$ διότι αν $f(a)=0$ τότε και $f(\beta)=0$ άτοπο)

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M\left(x_0,f(x_0)\right)$ είναι $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ η οποία διέρχεται από το $(0,0)$ όταν $-f(x_0)=-x_0\cdot f'(x_0)\Leftrightarrow x_0\cdot f'(x_0)-f(x_0)=0$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α,β) η εξίσωση

$$x\cdot f'(x)-f(x)=0\Leftrightarrow\frac{x\cdot f'(x)-f(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=0.$$

Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)}{x},x\in[a,\beta]$

- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[a,\beta]$ και
- $g(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{a}=\dfrac{f(\beta)}{\beta}=g(\beta)$ λόγω της (1)

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, έχει μία τουλάχιστον λύση στο (α,β) η εξίσωση $g'(x)=0$ δηλαδή η ισοδύναμη της $x\cdot f'(x)-f(x)=0$

Θέμα 4ο

α) $\int_0^x (t^2+1)f''(t)dt=-2\int_0^x tf'(t)\,dt-4x\cdot f(x)\cdot\int_0^1 tdt$

$$\int_0^x (t^2+1)f''(t)dt=-2\int_0^x t\cdot f'(t)dt-4x\cdot f(x)\cdot\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1$$

$$\int_0^x (t^2+1)f''(t)dt=-2\int_0^x t\cdot f'(t)dt-\frac{4}{2}x\cdot f(x)\quad (1)$$

Με παραγώγιση των μελών της (1) έχουμε:

$$(x^2+1)f''(x)=-2x\cdot f'(x)-2f(x)-2x\cdot f'(x)$$

$$(x^2+1)f''(x)+2x\cdot f'(x)=-2f(x)-2x\cdot f'(x)$$

$$\left[(x^2+1)f'(x)\right]'=\left[-2x\cdot f'(x)\right]',\text{ άρα } (x^2+1)f'(x)=-2x\cdot f(x)+C_1\quad (2)$$

Για $x=0$ είναι $f'(0)=C_1$ άρα $C_1=2$

Η (2) γράφεται:

$$(x^2+1)f'(x)+2x\cdot f(x)=2$$

$$\left[(x^2+1)f'(x)\right]'=(2x)'\ \text{ Άρα }\ (x^2+1)\cdot f(x)=2x+C_2$$

Για $x=0$ είναι $f(0)=C_2$ άρα $C_2=0$. Επομένως $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1},x\in R$

<u>β΄ μέθοδος</u>

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\left[(t^2+1)f'(t)\right]_0^x-\int_0^x 2tf'(t)dt=-2\int_0^x tf'(t)dt-4xf(x)\int_0^1 tdt\Leftrightarrow$$

$$(x^2+1)f'(x)-f'(0)=-4x\cdot f(x)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1\Leftrightarrow$$

$$(x^2+1)f'(x)-2=-2x\cdot f(x)\Leftrightarrow$$

$$(x^2+1)f'(x)+2x\cdot f(x)=2\Leftrightarrow$$

$$\left[\left(x^2+1\right)f(x)\right]' = (2x)'$$

Άρα $\left(x^2+1\right)f(x) = 2x + c$

Για $x=0$ είναι $f(0)=c$ δηλαδή $c=0$ οπότε $\left(x^2+1\right)f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

β) $\mathrm{E}(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{2x}{x^2+1}dx = \int_0^a \left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'dx = \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^a = \ln\left(a^2+1\right)$.

Το a είναι συνάρτηση του χρόνου οπότε:

$$E'(a) = \left[\ln\left(a^2(t)+1\right)\right]' = \frac{1}{a^2(t)+1}\left(a^2(t)+1\right)' = \frac{2a(t)\cdot a'(t)}{a^2(t)+1}.$$

Είναι $a'(t) = \dfrac{10}{3}cm/\sec$ και $a(t) = 3cm$, άρα $E'(1) = \dfrac{2\cdot 3\cdot \frac{10}{3}}{9+1}cm^2/\sec = 2cm^2/\sec$.

Ο ρυθμός μεταβολής του $E(a)$ όταν $a = 3cm$.

γ) i) Αφού $x \to +\infty$ για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$-\left|f(x)\right| \le g(x) + x - 2 \le \left|f(x)\right|$$

$$-\frac{2x}{x^2+1} \le g(x) - (-x+2) \le \frac{2x}{x^2+1}$$

Είναι $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2x}{x^2+1}\right) = 0 = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2+1}$.

Άρα $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+2)\right] = 0$ που σημαίνει ότι η ευθεία $y=-x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

ii) Είναι $E = \displaystyle\int_0^2 \left|g(x)-(-x+2)\right|dx = \int_0^2 \left|g(x)+x-2\right|dx$ και

$\left|g(x)+x-2\right| \le \left|f(x)\right|$ (ερώτημα i)

$\left|g(x)+x-2\right| - \left|f(x)\right| \le 0$. Άρα

$$\int_0^2 \left[\left|g(x)+x-2\right| - \left|f(x)\right|\right]dx \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 \left|g(x)+x-2\right|dx - \int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}dx \le 0 \Leftrightarrow$$

$$E - \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^2 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$E - \ln 5 \le 0 \Leftrightarrow E \le \ln 5$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2004

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δες σχολικό βιβλίο, σελίδα 194: Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Β. $I_1 > 0$ Δες σχόλιο σελίδα 346.

$I_2 = f(3) - f(0) < 0$ γιατί $f(3) < f(0)$

$I_3 = f'(3) - f'(0) < 0$ γιατί η κλίση της C_f στο $(3, f(3))$ είναι αρνητική και στο $(0, f(0))$ είναι θετική.

Γ. $1 \to \gamma$

$2 \to \beta$

$3 \to \alpha$

$4 \to \delta$

Δ. Δες σχολικό βιβλίο, σελίδα 224 στίχοι 1 έως 8.

ΘΕΜΑ 2ο

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)+2) = 0$ (1) και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x-2) = 0$ (2)

α. i) Το κλάσμα $\dfrac{g'(x)}{f'(x)-1}$ ορίζεται σε διάστημα Δ της μορφής $(\alpha, +\infty)$, αφού $f'(x)\neq 1$. Στο Δ είναι

$$\frac{(g(x)+2)'}{(f(x)-x-2)'} = \frac{g'(x)}{f'(x)-1}$$

Ακόμα: $f'(x)-g'(x)=1 \Leftrightarrow g'(x)=f'(x)-1$, οπότε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g'(x)}{f'(x)-1} = 1$.

Από το πρώτο θεώρημα του De l' Hospital προκύπτει:

$$L = \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)+2}{f(x)-x-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(g(x)+2)'}{(f(x)-x-2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{g'(x)}{f'(x)-1} = 1.$$

ii) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)+2) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -2$, άρα η C_f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = -2$.

Πάλι, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x-2) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right] = 0$, άρα η C_f έχει στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = x+2$

β) Έστω ότι η g έχει δύο διαφορετικές ρίζες ρ_1, ρ_2 στο $\mathbb{R}$ με $\rho_1 < \rho_2$. (απόδειξη με άτοπο)

Εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle για την g στο $[\rho_1, \rho_2]$ γιατί , ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

- η g είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) , και ακόμα
- $g(\rho_1) = g(\rho_2) = 0$.

Επομένως, υπάρχει $\xi\in(\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$. Τότε: $f'(\xi)-g'(\xi)=1 \Leftrightarrow f'(\xi)=1$. Άτοπο, γιατί $f'(x) \neq 1$. Έτσι, η g έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

γ) Έχουμε $f'(x)-g'(x) = x \Leftrightarrow (f(x)-g(x))' = (x)'$, άρα, από τις συνέπειες του Θ. Μ. Τ. του διαφορικού λογισμού, υπάρχει αριθμός $c\in\mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $f(x)-g(x)=x+c$ (1) ή

$$f(x)-x-2 = g(x) + 2 + c-4. \quad (2)$$

Επειδή υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x-2) = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[(g(x)+2)+c-4] = 0+c-4$, από την (2) είναι ίσα. Προκύπτει, επομένως : $0 = c-4$ ή $c = 4$. Άρα, είναι: $f(x)-g(x)=x-4$, $x\in\mathbb{R}$.

[Στην (1) καταλήγουμε και με ολοκλήρωση των δύο μελών της $f'(x)-g'(x) = x$]

ΘΕΜΑ 3ο

Α. i) Επειδή, προφανώς, η $f(t)=\dfrac{2}{\alpha+e^t}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η g παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ με

$g'(x) = \dfrac{2}{\alpha+e^t} > 0$, επομένως, η g είναι γνησίως αύξουσα και σαν τέτοια είναι 1−1 και αντιστρέφεται.

ii) Η C_g είναι το σύνολο των σημείων $(x, g(x))$ με $x\in\mathbb{R}$, άρα η C_g^{-1} είναι το σύνολο των σημείων $(g(x), x)$ και σ' αυτήν ανήκουν οι εικόνες $M(g(x), x)$ του $z = g(x)+xi$, $x\in\mathbb{R}$

Β. α) Έχουμε κατά σειρά

$$|\bar{z}+i| \le |z-1| \Leftrightarrow |\,g(x)-xi+i\,| \le |\,g(x)+xi-1|$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{g^2(x)+(1-x)^2} \le \sqrt{(g(x)-1)^2+x^2}$$
$$\Leftrightarrow \ldots{-2x} \le -2g(x) \Leftrightarrow g(x) \le x$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) \le \mathrm{Im}(z),\ x\in\mathbb{R}$$

β) Θεωρούμε την συνάρτηση: $h(x) = g(x) - x$, $x\in\mathbb{R}$.

Από το **Βα** είναι $g(x) \le x \Leftrightarrow g(x) - x \le 0 \Leftrightarrow h(x) \le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ακόμα, $g(0) = \displaystyle\int_0^0 \frac{2}{a+e^t}dx = 0 \Leftrightarrow h(0)=0$, έτσι η h έχει ακρότατο (ολικό μέγιστο) για x=0.

Είναι $h'(x) = g'(x)-1 = \dfrac{2}{\alpha+e^t} - 1$, $x\in\mathbb{R}$

Επειδή το x=0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της h και η h παραγωγίζεται σ' αυτό, από το θεώρημα του Fermat προκύπτει : $h'(0)=0$ ή ισοδύναμα $\dfrac{2}{\alpha+e^0} - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha=1$.

γ. Επειδή η g παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής στο [1, 2] και παραγωγίσιμη στο (1, 2). Από το Θ.Μ.Τ του διαφορικού λογισμού, υπάρχει $\xi\in(1, 2)$ με

$$\frac{g(2)-g(1)}{2-1} = g'(\xi) \quad \text{ή}$$

$$\int_0^2 \frac{2}{a+e^t}dt - \int_0^1 \frac{2}{a+e^t}dt = \frac{2}{a+e^\xi} \quad \text{ή}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{a+e^t}dt - \int_0^1 \frac{1}{a+e^t}dt = \frac{1}{a+e^\xi} \quad (1)$$

Επειδή $\xi\in(1, 2)$ είναι διαδοχικά:

$$1 < \xi < 2 \quad \text{ή}$$

$$e < e^\xi < e^2 \quad [\ e^x \text{ γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}\ ] \text{ ή}$$

$$1+e < 1+e^\xi < 1+e^2 \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{1+e^2} < \frac{1}{1+e^\xi} < \frac{1}{1+e} \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{1+e^2} < \frac{1}{a+e^\xi} < \frac{1}{1+e} \quad [\ \alpha=1\ ]$$

και η (1) δίνει το ζητούμενο:

$$\frac{1}{1+e^2} < \int_0^2 \frac{1}{a+e^t}dt - \int_0^1 \frac{1}{a+e^t}dt < \frac{1}{1+e}$$

ΘΕΜΑ 4ο

***α)* i)** Είναι $f^2(x) + g^2(x) = 1$ (1), $x \in \mathbb{R}$
και $f'(x) = g^2(x) \neq 0$ (2), $x \in \mathbb{R}$

οπότε:

$$(f^2(x) + g^2(x))' = 0$$
$$\text{ή} \quad 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 0$$
$$\text{ή} \quad 2f(x)g^2(x) + 2g(x)g'(x) = 0$$

και επειδή $g(x) \neq 0$ είναι $f(x)g(x) + g'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = -f(x)\,g(x)$, $x \in \mathbb{R}$

ii) Επειδή η g δεν μηδενίζεται και είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Είναι $g(0) = 1 > 0$, άρα:

$$g(x) > 0 \quad (3), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, γιατί από την (2): $f'(x)=g^2(x) > 0$.

Από την (1): $f^2(0) + g^2(0) = 1 \Leftrightarrow f^2(0) + 1 = 1 \Leftrightarrow f(0) = 0$. (4)

Έτσι,

- για $x < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$
- για $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$

Η $g'(x)=-g(x)f(x)$, λόγω της (3), έχει για κάθε $x \neq 0$ αντίθετο πρόσημο της f(x), που σημαίνει ότι

- για $x < 0$ είναι $f(x) < 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$ και
- για $x > 0$ είναι $f(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0$

Άρα, η g, ως συνεχής στο $x_0=0$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και έχει ακρότατο (ολικό μέγιστο) το $g(0) = 1$, το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

β i) Λόγω της (3) ισχύει η ισοδυναμία:

$$g(x_1) < g(x_2) \Leftrightarrow g^2(x_1) < g^2(x_2) \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(x_2), \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

που σημαίνει, τελικά, ότι η f' έχει ίδια μονοτονία με την g. Επομένως, η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $(0, f(0)) = (0, 0)$.

Άλλος τρόπος. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη, είναι παραγωγίσιμη και η g^2, άρα από την (2) και η f', που σημαίνει ότι υπάρχει η f''. Τότε:

$f''(x) = (f'(x))' = (g^2(x))' = 2g(x)\,g'(x)$ έτσι, από την (3), η $f''(x)$ για κάθε $x \neq 0$ έχει ίδιο πρόσημο με την $g'(x)$:

- για $x < 0$ είναι $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0$ και
- για $x > 0$ είναι $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0$

Επειδή η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ προκύπτει, ότι είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $(0, f(0)) = (0, 0)$.

ii) Η ζητούμενη εξίσωση είναι $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ ή $y = f'(0)\cdot x$ ή $y=x$ αφού από την (2) έπεται $f'(0)=1$.

γ. Επειδή η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$, τα σημεία της C_f είναι κάτω από τα σημεία της εφαπτομένης της $y=x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, επομένως: $x \geq f(x) \Leftrightarrow x-f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$

$$\text{Είναι } E = \int_0^1 |x - f(x)|\,dx = \int_0^1 (x - f(x))dx \overset{(\alpha i)}{=} \int_0^1 \left(x + \frac{g'(x)}{g(x)}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \ln|g(x)|\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \ln|g(1)| - \frac{0}{2} - \ln|g(0)|$$

$$= \frac{1}{2} + \ln|g(1)| - \ln 1 = \frac{1}{2} + \ln[g(1)]. \qquad [\text{ γιατί } g(1) > 1 \text{ από την (3) }]$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Γ. 1 – **(Λάθος)** – 2 **(Σωστό)** – 3 **(Λάθος)** 4 **(Λάθος)** διότι από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f'(x_0) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > 0$ διότι α<β και $f(\alpha) < f(\beta)$

5 (Λάθος) διότι: αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$

Θέμα 2ο

α) Για κάθε $x > 0,\ f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot (\ln x - 2) + 2\sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{x} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}(\ln x - 2) + \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}(\ln x - 2 + 2) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

β) $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}\left[\dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \ln x\right] = -\infty$ διότι

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

γ) Για κάθε χ>0, $f''(x) = \dfrac{(\ln x)' \cdot \sqrt{x} - \ln x\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} =$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{x}}{x} - \ln x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$$

Είναι $2 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 2 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln e^2 \Leftrightarrow 0 < x \leq e^2$

x	0	e^2	$+\infty$
f΄΄(x)	+		-
F(x)	κυρτή	Σ.Κ	κοίλη

$$f\left(e^2\right)=2e\left(\ln e^2-2\right)=0$$

$M\left(e^2,0\right)$ το σημείο καμπής

δ) $$E=\int_{1/e}^{e^2}\left|\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right|dx=\int_{1/e}^{1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx+\int_{1}^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$$

$$=\left[-2\sqrt{x}\left(\ln x-2\right)\right]_{1/e}^{1}+\left[2\sqrt{x}\left(\ln x-2\right)\right]_{1}^{e^2}=$$

$$=-2(-2)+\frac{2}{\sqrt{e}}\left(\ln\frac{1}{e}-2\right)+2e\cdot\left(\ln e^2-2\right)-2(-2)$$

$$=8+\frac{2}{\sqrt{e}}(-1-2)+2e(2-2)=8-\frac{6}{\sqrt{e}}\text{ τ.μ.}$$

Θέμα 3ο

α) $\operatorname{Re}(z)>\operatorname{Im}(z)\Leftrightarrow e^x>x-1\Leftrightarrow e^x-x+1>0$

Έστω $f(x)=e^x-x+1,\ x\in\mathbf{R}$. Τότε $f'(x)=e^x-1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f΄(x)	–		+
F(x)	↘	2	↗

Η f για χ=0 παρουσιάζει ελάχιστο το 2. Άρα $f(x)\geq f(0)=2>0$ δηλαδή $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$

β) $$w=\left[e^x+(x-1)i\right]^2+e^x+(x-1)i+2i=$$

$$=e^{2x}+2i(x-1)\cdot e^x-(x-1)^2+e^x+(x-1)i+2i=$$

$$=e^{2x}+e^x-(x-1)^2+i\left[2(x-1)e^x+x+1\right]$$

Έστω $g(x)=2(x-1)e^x+x+1,\ x\in[0,1]$

- Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$
- $g(0)=-2+1=-1$, $g(1)=1+1=2$ Άρα $g(0)\cdot g(1)<0$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιος ώστε $g(x_0)=0$ που σημαίνει ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιος ώστε 0 W να είναι πραγματικός.

γ) $|z| = \sqrt{e^{2x} + (x-1)^2}$ το οποίο γίνεται ελάχιστο όταν η συνάρτηση $h(x) = e^{2x} + (x-1)^2$ έχει ελάχιστο.

$h'(x) = 2e^{2x} + 2(x-1)$. Προφανής λύση είναι η χ=0 διότι $h'(0) = 2-2=0$. Είναι $h''(x) = 4e^{2x} + 2 > 0$. Άρα η $h'(x)\uparrow$.

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
h΄(x)	− +
H(x)	↘ min ↗

Για κάθε χ<0 ισχύει $h'(x) < h'(0) = 0$ και για κάθε χ>0 ισχύει $h'(x) > h'(0) = 0$. Επομένως η $h(x)$ έχει ελάχιστο στο χ=0.

Συνεπώς ο μιγαδικός $z = e^0 + (0-1)i = 1-i$ έχει το μικρότερο μέτρο.

Θέμα 4ο

α) $e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) + f'(x) = -\eta\mu x$

$$\left[e^x \cdot f(x) + f(x)\right]' = (\sigma\upsilon\nu x)'$$

Άρα υπάρχει $c \in \mathbf{R}$ τέτοιο ώστε:

$$e^x \cdot f(x) + f(x) = \sigma\upsilon\nu x + c,\ x \in \mathbf{R}$$

$$(e^x + 1)\cdot f(x) = \sigma\upsilon\nu x + c.$$

Για χ=0 είναι $2f(0) = \sigma\upsilon\nu 0 + c \Leftrightarrow 2\cdot\frac{1}{2} = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$

Επομένως $f(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x},\ x \in \mathbf{R}$

Έχουμε $f(x) + f(-x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{-x}} = \ldots = \sigma\upsilon\nu x \quad (1)$

β) $-\dfrac{1}{1+e^x} \le \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x} \le \dfrac{1}{1+e^x},\ x \in \mathbf{R}$ διότι $-1 \le \sigma\upsilon\nu x \le 1$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 0$, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

γ) Με ολοκλήρωση των μελών της (1) παίρνουμε

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(-x)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x dx \quad \textbf{(2)}$$

Στο $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(-x)\,dx$ θέτουμε $x=-u$ οπότε $dx=-du$.

Για $x=-\pi/2$ είναι $u=\pi/2$ και για $x=\pi/2$ είναι $u=-\pi/2$

Άρα $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(-x)\,du = -\int_{\pi/2}^{-\pi/2} f(u)\,du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(u)\,du$.

Η (2) γράφεται:

$$I + I = [\eta\mu x]_{-\pi/2}^{\pi/2} \Leftrightarrow 2\mathrm{I} = \eta\mu\pi/2 - \eta\mu(-\pi/2) = 1+1=2$$

Επομένως Ι= 1.

δ) Βρίσκουμε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της f στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$f'(x) = \frac{-\eta\mu x\cdot(1+e^x) - \sigma\upsilon\nu x\cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{\eta\mu x\cdot(1+e^x)+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{(1+e^x)^2} < 0$$

για κάθε $x\in[0, \pi/2]$. Άρα $f\downarrow$ στο $[0, \pi/2]$ οπότε $f(0)=\frac{1}{2}$ η μέγιστη τιμή και $f(\pi/2)=0$ η ελάχιστη.

Ισχύει $0 \le f(x) \le \frac{1}{2}$ απ' όπου προκύπτει ότι $0 \le \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx \le \frac{\pi}{4}$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1

Β) **α)** Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Λάθος

Θέμα 2

α) $\left|\frac{w-i}{w+i}\right| = \left|\frac{\frac{z+i}{1+iz}-i}{\frac{z+i}{1+iz}+1}\right| = \left|\frac{z+i-i-i^2z}{z+i+i+i^2z}\right| = \left|\frac{2z}{2i}\right| = |z|$

β) Λόγω (α) ερωτήματος έχουμε: $|w-i|=|w+i|$. Αν $w=x+yi$ τότε
$|x+yi-i|=|x+yi+i| \Leftrightarrow |x+(y-1)i| = |x+(y+1)i| \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{x^2+(y+1)^2} \Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1 = x^2+y^2+2y+1 \Leftrightarrow y=0$
Άρα το σημείο Μ ανήκει στον x΄x.

γ) $w\in I \quad \Leftrightarrow w=-\overline{w} \Leftrightarrow \frac{z+i}{1+iz} = -\frac{\overline{z}-i}{1-i\overline{z}} \Leftrightarrow$
$(z+i)(1-i\overline{z}) = -(1+iz)\cdot(\overline{z}-i) \Leftrightarrow$
$z+i-iz\overline{z}+\overline{z} = -(\overline{z}+iz\overline{z}-i+z) \Leftrightarrow$
$z+i-iz\overline{z}+\overline{z} = -\overline{z}-iz\overline{z}+i-z \Leftrightarrow 2z=-2\overline{z} \Leftrightarrow z=-\overline{z} \Leftrightarrow z\in I$.

δ) Έχουμε $f(\beta)i = \frac{f(a)i+i}{1+i^2f(a)} \Leftrightarrow f(\beta) = \frac{f(a)+1}{1-f(a)} < 0$ διότι $f(a)>1$

Άρα $f(a)\cdot f(\beta)<0$. Η f είναι συνεχής στο $[a,\beta]$.
Σύμφωνα με το θ. Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (a,β).

Θέμα 3

α) $f'(x)=e^x-a$ οπότε $f'(0)=1-a$

$\varepsilon: y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow$

$y=(1-a)x$

β) Είναι $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq a \Leftrightarrow x\geq \ln a$

x	-∞	$\ln a$ +∞
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	↘	↗

Η f στο $x_0=\ln a$ παρουσιάζει ελάχιστο το

$g(a)=e^{\ln a}-a\ln a-1=a-a\ln a-1$

Επειδή $g'(a)=1-\ln a-1=-\ln a<0$ για κάθε $a\in(1,+\infty)$ και g συνεχής στο $[1,+\infty)$ η g είναι ↓ στο $[1,+\infty)$ οπότε για κάθε $a>1$ ισχύει

$g(a)<g(1)=0$

γ) i) $E(a)=\int_0^a \left|f(x)-(1-a)x\right|dx$. Επειδή η f είναι κυρτή διότι

$f''(x)=e^x>0$ και η $\psi=(1-\alpha)x$ εφαπτομένη της c_f στο $(0,f(0))$, ισχύει :

$f(x)\geq(1-a)x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα $E(a)=\int_0^a\left(e^x-ax-1-x+ax\right)dx=\int_0^a\left(e^x-x-1\right)dx$

$=\left[e^x-\dfrac{x^2}{2}-x\right]_0^a = e^a-\dfrac{a^2}{2}-a-1$ τ.μ.

ii) $E(a)=a^2\left(\dfrac{e^a}{a^2}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2}\right)$. Είναι $\lim\limits_{a\to+\infty}\dfrac{e^a}{a^2}=\lim\limits_{a\to+\infty}\dfrac{(e^a)'}{(a^2)'}$

$=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{e^a}{2a}=\lim\limits_{a\to+\infty}\dfrac{(e^a)'}{(2\alpha)'}=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{e^a}{2}=+\infty$. Επομένως $\lim\limits_{a\to+\infty}E(a)=+\infty$

Θέμα 4

α) Θέτουμε $x \cdot t = u$ τότε $(xt)' dt = du \Leftrightarrow x\,dt = du$ οπότε

για κάθε $x \neq 0$ είναι $dt = \dfrac{1}{x} du$

- Για $t = 0$ είναι $u = 0$ και για $t = 1$ είναι $u = x$.

Άρα $g(x) = \int_0^x \dfrac{u}{x} \cdot \dfrac{1}{x} \cdot f(u) dx = \dfrac{1}{x^2} \int_0^x u\, f(u) du$

Επειδή το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της μεταβλητής ολοκλήρωσης, έχουμε.

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x t\, f(t) dt, \quad x \neq 0$$

β) Η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, όταν $\lim_{x \to 0} g(x) = g(0)$.

Είναι $g(0) = \int_0^1 t\, f(0)\, dt = f(0) \int_0^1 t\, dt = f(0) \left[\dfrac{t^2}{2} \right]_0^1 = \dfrac{1}{2} f(0)$

Επειδή $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ και $\lim_{x \to 0} \int_0^x t\ f(t) dt = \int_0^0 t\ f(t) dt = 0$

(Η $\int_0^x t\ f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής)

σύμφωνα με το θ. De L΄ Hospital έχουμε

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\int_0^x t\ f(t) dt \right)'}{(x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{x f(x)}{2x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{2} = \frac{f(0)}{2}$$

διότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ Άρα $\lim_{x \to 0} g(x) = g(0)$

που σημαίνει ότι η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

γ) Για κάθε $x > 0$ η ανισότητα γράφεται:

$$x \cdot \frac{1}{x^2} \int_0^x t\ f(t) dt < \int_0^x \cdot f(t) dt \Leftrightarrow \frac{1}{x} \int_0^x t\ f(t) dt < \int_0^x f(t) dt \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x t\ f(t) dt < x \int_0^x f(t) dt \Leftrightarrow \int_0^x t\ f(t) dt - x \int_0^x f(t) dt < 0$$

Έστω η συνάρτηση:

$$h(x) = \int_0^x t\ f(t) dt - x \int_0^x f(t) dt, x \geq 0$$

$$h'(x) = x \cdot f(x) - \int_0^x f(t)\,dt - x \cdot f(x) = -\int_0^x f(t)\,dt < 0$$ για κάθε χ>0.

διότι από $f(t) > 0$ προκύπτει ότι:

$\int_0^x f(t)\,dt > 0$ για κάθε χ>0.

Η h είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ (πράξεις συνεχών συναρτήσεων)

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Επομένως για κάθε χ>0 ισχύει $h(x) < h(0)$ Αλλά $h(0) = \int_0^0 t\, f(t)\,dt = 0$ συνεπώς

$g(x) < 0$ για κάθε χ>0.

δ) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ και ισχύει:

$$g(2) = \frac{1}{4}\int_0^2 t \cdot f(t)\,dt = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 t \cdot f(t)\,dt + \int_1^2 t \cdot f(t)\,dt\right) = \int_0^1 t \cdot f(t)\,dt = g(1).$$

Σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιος ώστε $g'(\xi) = 0$.

Με παραγώγιση των μελών της $x^2 g(x) = \int_0^x t \cdot f(t)\,dt$ έχουμε:

$2x \cdot g(x) + x^2 g'(x) = x \cdot f(x) \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} 2g(x) + x \cdot g'(x) = f(x)$ οπότε για $x = \xi$ προκύπτει: $2g(\xi) + \xi \cdot g'(\xi) = f(\xi) \Leftrightarrow 2g(\xi) = f(\xi)$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Β. **1**. Λάθος **2**. Σωστό **3**. Σωστό
4. Λάθος **5**. Λάθος **6**. Σωστό

Θέμα 2ο

α) $f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - (x^2 + a)e^{-x} = (2x - x^2 - a)e^{-x} = (-x^2 + 2x - a)e^{-x}$

$f(0) = a$ και $f'(0) = -a$

$\varepsilon : y - a = -ax \Leftrightarrow y = -ax + a$ η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\mathrm{M}(0, f(0))$. Ταυτίζεται με την $y = -2x + 2$ όταν $-a = -2$ και $a = 2$ δηλαδή όταν $a = 2$.

β) Για $a = 2$ είναι $f(x) = (x^2 + 2)e^{-x}$ και $f'(x) = (-x^2 + 2x - 2)e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in \Re$ διότι $-x^2 + 2x - 2 < 0$ και $e^{-x} > 0$ για κάθε $x \in \Re$. Άρα η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.

γ) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[(x^2 + 2)e^{-x}\right] = +\infty$

διότι $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 2) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[(x^2 + 2) \cdot e^{-x}\right] \overset{(+\infty \cdot 0)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2}{e^x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2 + 2)'}{(e^x)'} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

δ) Από (β) και (γ) συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της $f(x)$ είναι $f(\mathrm{A}) = (0, +\infty)$ το οποίο περιέχει το 2007. Η $f(x) \downarrow$ στο $\Re$, άρα η εξίσωση $f(x) = 2007$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\Re$.

Θέμα 3ο

α) $|z+w|^2=|z-w|^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow z\cdot\overline{w}+\overline{z}\cdot w=0 \overset{(1)}{=} z\cdot\overline{w}+\overline{z\cdot\overline{w}}=0 \Leftrightarrow$

$2\operatorname{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)=0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)=0$

β) Ισχύει $z\cdot\overline{w}+\overline{z}\cdot w=0 \Leftrightarrow$ (ερώτημα (α)) $z\cdot\overline{w}=-\overline{z}\cdot w$. Διαιρούμε με $w\overline{w}=|w|^2$ και έχουμε $\frac{z}{w}=-\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ που σημαίνει ότι $\frac{z}{w}$ φανταστικός.

γ) Αν Α, Β οι εικόνες των z,w τότε $(\mathrm{OA})=|z|,(\mathrm{OB})=|w|$ και $(\mathrm{AB})=|z-w|$.

Αρκεί ότι $(\mathrm{OA})^2+(\mathrm{OB})^2=(\mathrm{AB})^2 \Leftrightarrow |z|^2+|w|^2=|z-w|^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)=0$ ισχύει.

β' μέθοδος

Η ισότητα $|z+w|=|z-w|$ γράφεται ισοδύναμα $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right| \Leftrightarrow$

$\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)^2=\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ Άρα $A\hat{O}B=90^0$

γ' μέθοδος

Αν Γ η 4η κορυφή του παραλληλόγραμμου με πλευρές ΟΑ και ΟΒ, τότε $(\mathrm{O\Gamma})=|z+w|$ και $(\mathrm{AB})=|z-w|$ επειδή $|z+w|=|z-w|$ είναι $(\mathrm{O\Gamma})=(\mathrm{AB})$. Επομένως ΟΑΓΒ ορθογώνιο.

δ) Είναι

$z\cdot\overline{w}=\left[a+i\cdot f(a)\right]\left[f(\beta)+\beta i\right]=a\cdot f(\beta)-\beta\cdot f(a)+\left[a\cdot\beta+f(a)f(\beta)\right]i$

οπότε $\operatorname{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)=0 \Leftrightarrow a\cdot f(\beta)-\beta\cdot f(a)=0 \Leftrightarrow \frac{f(a)}{a}=\frac{f(\beta)}{\beta}$.

Θα αποδείξουμε ότι έχει μια τουλάχιστον λύση στο (a,β) η εξίσωση

$x\cdot f'(x)-f(x)=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=0$. Εφαρμόζεται το Θ. Rolle για

την $h(x)=\frac{f(x)}{x}$ στο $[a,\beta]$, άρα υπάρχει $x_0\in(a,\beta)\ldots$

Θέμα 4ο

α) $g'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ και $g''(x)=\dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$

x	$-\infty$	0 $\quad$ $+\infty$
$g''(x)$	+	-
$g(x)$	$\cup$	$\cap$

Σ. Κ.

β) Για $x=0$ είναι $0\le g(0)\le 0$. Ισχύει η ισότητα

Για κάθε $x>0$ εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[0,x]$ οπότε υπάρχει

$\xi\in(0,x)$ τέτοιος ώστε $g'(\xi)=\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\dfrac{g(x)}{x}$ Έχουμε

$\dfrac{1}{1+x^2}\le g'(\xi)\le 1 \Leftrightarrow g'(x)\le g'(\xi)\le g'(0)$. Ισχύει διότι $g'(x)\downarrow$ στο

$[0,+\infty)$ και

$0<\xi<x$ (ερώτημα α)

β' μέθοδος

Θα αποδείξουμε ότι:

$$g(x)\ge\frac{x}{1+x^2}\Leftrightarrow\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt\ge\frac{x}{1+x^2}$$

Έστω $h(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt-\frac{x}{1+x^2},\ x\ge 0$

$$h'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1+x^2-1+x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=$$

$=\dfrac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και h συνεχής στο $[0,+\infty)$. Άρα

$h(x)\uparrow$ στο $[0,+\infty)$. Επομένως για κάθε $x\ge 0$ ισχύει $h(x)\ge h(0)=0$.

Όμοια αποδεικνύουμε ότι : $g(x)\le x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

γ) Έστω $h(x)=g(x)+g(-x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^{-x}\frac{1}{1+t^2}dt$.

Είναι $h'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}=0$ άρα $h(x)=c$

Για $x=0$ είναι $h(0)=0$. Επομένως $h(x)=0$, για κάθε $x\in\Re$.

β' μέθοδος

Είναι $g(x)+g(-x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^{-x}\frac{1}{1+t^2}dt$.

Στο $g(-x)$ θέτουμε $t=-u$ τότε $dt=-du$

Άκρα ολοκλήρωσης

Για $t=0, u=0$ και για $t=0, u=x$.

Άρα $g(-x)=\int_0^{-x}\frac{1}{1+t^2}dt=-\int_0^{x}\frac{1}{1+u^2}du$

Επομένως …

δ) Αφού $f(t)=\frac{1}{1+t^2}>0$ τότε $g(x)=\int_0^{1}\frac{1}{1+t^2}dt>0$. Άρα

$$\mathrm{E}=\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 x'\cdot g(x)dx=\left[x\cdot g(x)\right]_0^1-\int_0^1 x\cdot g'(x)dx=$$

$$=g(1)-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=g(1)-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\ln\left(1+x^2\right)\right)'dx=$$

$$=g(1)-\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1=g(1)-\frac{1}{2}\ln 2 \text{ τ.μ.}$$

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. **α.** Βλέπε Πόρισμα σελίδα 251 σχολικού βιβλίου.
β. Βλέπε σελίδα 224 σχολικού βιβλίου.

Β. **α.** (Σ), **β.** (Σ), **γ.** (Σ), **δ.** (Σ).

Γ. **α.** 0, **β.** 8, **γ.** 44

ΘΕΜΑ 2^{ο}

α. Η f είναι συνεχής για $x < 0$, ως πολυωνυμική και για $x > 0$, ως άθροισμα της τριγωνομετρικής ημx με την σταθερή $c(x) = \lambda$. Στο $x_0 = 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\eta\mu x + \lambda) = \lambda$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ((\mu - 1)x + 1) = 1$$

Ακόμα $f(0) = 1$. Για να είναι η συνάρτηση συνεχής στο $x_0 = 0$ πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Επομένως, η ζητούμενη τιμή είναι $\lambda = 1$.

β. Για $x > 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x + \lambda - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x + 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

Για $x < 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(\mu - 1)x + 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(\mu - 1)x}{x} = \mu - 1$$

Για να είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow \mu - 1 = 1 \Leftrightarrow \mu = 2$$

Επομένως, η ζητούμενη τιμή είναι $\mu = 2$.

γ. Είναι π.χ. $f(2\pi) = f(\pi) = \lambda$, άρα η συνάρτηση δεν είναι 1−1.

δ. Είναι

$$f(x)=\begin{cases}\eta\mu x+1, & \alpha\nu\ x>0\\ x+1, & \alpha\nu\ x\le 0\end{cases}$$

και

$$\int_{-2}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{-2}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{-2}^{0}(x+1)\,dx+\int_{0}^{\pi}(\eta\mu x+1)\,dx=$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-2}^{0}+\ [-\sigma\upsilon\nu x+x]_{0}^{\pi}=\pi+2$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. **i.** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι :

$f'(x)=\ (e^{1-e^x})'=(1-e^x)'\cdot e^{1-e^x}\ =-e^x e^{1-e^x}\ =-e^{1+x-e^x}$

Επειδή $e^{1+x-e^x}>0$ είναι $f'(x)<0$ στο $\mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

ii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$f''(x)=(-e^{1+x-e^x})'=-(1+x-e^x)'\cdot e^{1+x-e^x}\ =-(1-e^x)\cdot e^{1+x-e^x}\ =(e^x-1)\cdot e^{1+x-e^x}$

Έτσι: $f''(x)=0 \Leftrightarrow (e^x-1)\cdot e^{1+x-e^x}\ =0\ \Leftrightarrow e^x-1=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$
και $f''(x)>0\Leftrightarrow x>0,\quad f''(x)<0\Leftrightarrow\ x<0$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)<0$ στο διάστημα $(-\infty,0)$, άρα στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα $(-\infty,0]$. Ακόμα είναι $f''(x)>0$ στο διάστημα $(0,+\infty)$, άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $[0,+\infty)$.

Τέλος, η συνάρτηση έχει σημείο καμπής το $(0,\ f(0))$, γιατί εκατέρωθεν του αλλάζει κυρτότητα και υπάρχει η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης σ' αυτό, αφού είναι παραγωγίσιμη.

Είναι $f(0)\ =\ e^{1-1}\ =\ e^0\ =\ 1$ έτσι, η συνάρτηση έχει σημείο καμπής το (0, 1).

β. Θα βρούμε, αν υπάρχουν, τα όρια:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^{1-e^x})\quad\text{και}\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^{1-e^x})$$

Θέτουμε $u=1-e^x$ οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} u=\lim_{x\to+\infty}(1-e^x)=-\infty\quad\text{και}\quad \lim_{x\to-\infty} u=\lim_{x\to-\infty}(1-e^x)=1-0=0$$

Τότε είναι:

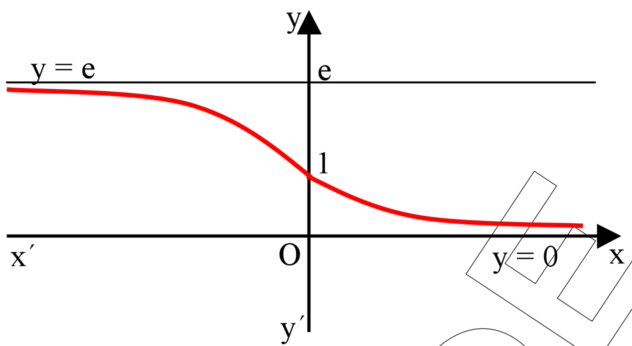
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^{1-e^x})=\lim_{u\to-\infty} e^u=0$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(e^{1-e^x}) = \lim_{u\to 1}(e^u) = e$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 0$ στο $+\infty$ και την $y = e$ στο $-\infty$.

γ. Με βάση τις πληροφορίες των προηγουμένων ερωτημάτων σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης:



x	$-\infty$	0	$+\infty$
f΄(x)	−	|	−
f΄΄(x)	−	|	+
f(x)	e ↘	$\boxed{1}$	↘ 0

δ. Στο α ερώτημα βρήκαμε $f'(x) < 0$, οπότε $|f'(x)| = -f'(x)$ και έτσι:

$$E = \int_{\ln\frac{1}{2}}^{0} |f'(x)|\,dx = -\int_{\ln\frac{1}{2}}^{0} f'(x)\,dx = -\left[f(x)\right]_{\ln\frac{1}{2}}^{0} = -f(0) + f\left(\ln\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -e^{1-e^0} + e^{1-e^{\ln\frac{1}{2}}} = -1 + e^{1/2} \text{ τμ}$$

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

α. Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς, οι συναρτήσεις $\int_1^x f(t)\,dt$ και $\int_0^x g(t)\,dt$, που ορίζονται από ολοκλήρωμα, είναι παραγωγίσιμες, έτσι μπορούμε να παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της (1), οπότε έχουμε:

$$\left(\int_1^x f(t)\,dt - 2\right)' = \left(x\int_0^x g(t)\,dt\right)'$$

$$\text{ή} \quad f(x) = x\,g(x) + \int_0^x g(t)\,dt \qquad (3)$$

Για $x = 0$ παίρνουμε: $f(0) = 0 + \int_0^0 g(t)\,dt = 0$

Με $x \neq 0$ από την (3) έχουμε:

$$\frac{f(x)}{x} = g(x) + \frac{\int_0^x g(t)\,dt}{x}$$

και:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(g(x)+\frac{\int_0^x g(t)\,dt}{x}\right)$$

Επειδή η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = 0$, είναι $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0)$.

Η συνάρτηση $h(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, $x\in\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη, άρα είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x g(t)\,dt=\lim_{x\to 0} h(x)=h(0)=\int_0^0 g(t)\,dt=0$$

Επομένως, το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x g(t)\,dt}{x}$$

είναι μορφή 0/0 και υπολογίζεται με τον κανόνα του De L' Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x g(t)\,dt}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\int_0^x g(t)\,dt)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{1}=g(0)$$

Έτσι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(g(x)+\frac{\int_0^x g(t)\,dt}{x}\right)=2g(0)$$

οπότε, τελικά:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2g(0)$$

β. Η (1) για $x = 1$ δίνει $\quad -2=\int_0^1 g(t)\,dt \quad (4)$

Επειδή η g(x) δεν μηδενίζεται και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο σ' αυτό. Αν ήταν $g(x) > 0$ τότε

$$\int_0^1 g(t)\,dt>0 \Leftrightarrow -2>0$$

Άτοπο. Άρα είναι $g(x) < 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ. Η (1) για $x = 0$ δίνει $\int_1^0 f(t)\,dt-2=0 \Leftrightarrow \int_1^0 f(t)\,dt=2 \qquad (5)$

Είναι $g(x) < 0 \Leftrightarrow -g(x) > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έτσι:

- με $x \geq 0$ είναι $\int_0^x[-g(t)]dt\geq 0\Leftrightarrow\int_0^x g(t)\,dt\leq 0$, άρα: $x\int_0^x g(t)\,dt\leq 0$
- με $x < 0$ είναι $\int_x^0[-g(t)]dt>0\Leftrightarrow\int_x^0 g(t)\,dt>0$, άρα: $x\int_0^x g(t)\,dt<0$

Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ από την (1) είναι:

$$x\int_0^x g(t)\,dt\leq 0 \Leftrightarrow \int_1^x f(t)\,dt-2\leq 0$$

$\Leftrightarrow \int_1^x f(t)\,dt \le 2$ $\qquad$ $[\int_1^0 f(t)\,dt = 2$ από (5)$]$

$\Leftrightarrow \int_1^x f(t)\,dt \le \int_1^0 f(t)\,dt$

2ος τρόπος: Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$, $x\in\mathbb{R}$ για την οποία $F'(x) = f(x)$. Από την (3), αφού $g(x) < 0$, βρίσκουμε:

- με $x > 0$ είναι $f(x) = x\,g(x) + \int_0^x g(t)\,dt < 0 \Leftrightarrow F'(x) < 0$
- με $x = 0$ είναι $f(0) = 0 \Leftrightarrow F'(x) = 0$
- με $x < 0$ είναι $f(x) = x\,g(x) + \int_0^x g(t)\,dt > 0 \Leftrightarrow F'(x) > 0$

οπότε η $F(x)$ έχει μέγιστο το $F(0)$, άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$:

$$F(x) \le F(0) \Leftrightarrow \int_1^x f(t)\,dt \le \int_1^0 f(t)\,dt$$

δ. (Απόδειξη με Rolle σε αρχική). Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$H(x) = \int_0^x f(t)\,dt - 2\int_0^x g(t)\,dt - 2x \text{ με } x\in[0, 1]$$

Επειδή οι f, g είναι συνεχείς, οι συναρτήσεις $\int_0^x f(t)\,dt$ και $\int_0^x g(t)\,dt$ ως οριζόμενες από ολοκλήρωμα, είναι παραγωγίσιμες. Ακόμα η $2x$ είναι παραγωγίσιμη, ως πολυωνυμική, άρα η $H(x)$, ως αλγεβρικό άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, είναι:

- Παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, άρα και στο (0, 1) με
$$H'(x) = f(x) - 2g(x) - 2$$
- συνεχής στο [0, 1], ως παραγωγίσιμη σ' αυτό.
Ακόμα:
- $H(0) = 0$ και

$$H(1) = \int_0^1 f(t)\,dt - 2\int_0^1 g(t)\,dt - 2$$
$$= -\int_1^0 f(t)\,dt - 2\int_0^1 g(t)\,dt - 2$$
$$= -2 - 2\cdot(-2) - 2 = 0 \qquad [\text{ από (4) και (5) }]$$

Επομένως, εφαρμόζεται για την $H(x)$ το θεώρημα του Rolle, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0, 1)$ με

$$H'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - 2g(\xi) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 2g(\xi) + 2,$$

που σημαίνει ότι το ξ είναι ρίζα στο (0, 1) της εξίσωσης $f(x) = 2g(x) + 2$.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολ. Βιβλίο σελ. 260

Β. **1.** Σχολ. Βιβλίο σελ. 280
2. Σχολ. Βιβλίο σελ. 191

Γ. **1.** Σ
2. Λ
3. Λ
4. Σ
5. Λ

ΘΕΜΑ 2ο

Α. $z+\frac{1}{z}=-1 \Leftrightarrow z^2+1=-z \Leftrightarrow z^2+z+1=0$ με $z_1z_2=1$ (τύποι Vieta)

$\left(ή\ \Delta=1^2\text{-}4.1.1=\text{-}3 \quad z_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ και } z_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$ και

$$z_1^2+z_1+1=0 \Rightarrow z_1^3+z_1^2+z_1=0 \Leftrightarrow z_1^3=-\left(z_1^2+z_1\right)=-1 \quad ή \quad z_1^3=\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\ldots$$

Β. Οι αριθμοί z_1 και z_2 συζυγείς οπότε $\overline{z_1^{2009}}=\overline{z_1}^{2009}=z_2^{2009}$
Άρα $\left(z_1^{2009}+z_2^{2009}\right)\in\Re$ σαν άθροισμα συζυγών

Γ. $z_1^8+\frac{1}{z_2^{10}}+1=z_1^8+z_1^{10}+1=\left(z_1^3\right)^2.z_1^2+\left(z_1^3\right)^3z_1+1=z_1^2+z_1+1=0$

Δ. Έστω $g(x)=f(x)-3x+2$, συνεχής στο [0,1] σαν άθροισμα συνεχών (f παραγωγίσιμη οπότε και συνεχής και –3x+2 συνεχής ως πολυωνυμική με

$$g(0)=f(0)+2=\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}+2+2=\frac{z_1^2+z_2^2}{z_1z_2}+4=\frac{\left(z_1+z_2\right)^2-2z_1z_2}{z_1z_2}+4=\frac{(-1)^2-2.1}{1}+4=3>0$$

και $g(1)=f(1)-3+2=\frac{1}{2z_1}+\frac{1}{2z_2}-\frac{3}{2}-1=\frac{2z_2+2z_1}{4z_1z_2}-\frac{5}{2}=\frac{-2}{4}-\frac{5}{2}=-3<0$

Άρα από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε

$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - 3x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 3x_0 - 2$

Ε. w = 2(z_1+z_2)=2(-1)=-2 δηλαδή Γ (-2,0), και $A\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ τότε

$$|\Gamma A| = \sqrt{\left(-2+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

$$|\Gamma B| = \sqrt{\left(-2+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

Άρα $|\Gamma A| = |\Gamma B|$

ΘΕΜΑ3^o

Α. $f(x) = x + 2 + 2\ln x$ **με** π.ο. $D_f = (0,+\infty)$

$f'(x) = 1 + \frac{2}{x} > 0 \Rightarrow f \uparrow (0,+\infty)$

$f''(x) = \frac{-2}{x_2} < 0 \Rightarrow f$ κοίλη στο $(0,+\infty)$

Β. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x+2+2\ln x) = 0 + 2 - \infty = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x+2+2\ln x) = +\infty + 2 + \infty = +\infty$ δηλαδή f(A)=$(-\infty,+\infty)$

Αφού το $0 \in f(A)$ έχει η f(x)=0 ρίζα x_0 στο $(0,+\infty)$, μοναδική γιατί $f \uparrow (0,+\infty)$

Γ. Θέλω g(x) $\geq$ g(x_0) δηλαδή η g να έχει ελάχιστο στο x_0. Έχω

$$g'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x+2) - x\ln x}{(x+2)^2} = \frac{x\ln x + 2\ln x + x + 2 - x\ln x}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{2\ln x + x + 2}{(x+2)^2} = \frac{f(x)}{(x+2)^2}$$

Αν $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

x		x_0	
g'(x)	−	0	+
g(x)	↘	ελ	↗

άρα η g(x) έχει ελάχιστο στο x_0 δηλαδή $g(x) \geq g(x_0)$

Δ. Θέλω $f(x-2)<2f(x+1)-f(x+4) \Leftrightarrow f(x+4)-f(x+1)<f(x+1)-f(x-2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+4)-f(x+1)}{(x+4)-(x+1)} < \frac{f(x+1)-f(x-2)}{(x+1)-(x-2)}$$

έχω από Θ.Μ.Τ. ότι υπάρχουν ξ_1 , $\in (x+1, x+4)$ και $\xi_2 \in (x-2, x+1)$ ώστε

$f'(\xi_1) = \dfrac{f(x+4)-f(x+1)}{(x+4)-(x+1)}$ και $f'(\xi_2) = \dfrac{f(x+1)-f(x-2)}{(x+1)-(x-2)}$ δηλαδή θέλω

$f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$

Όμως f κοίλη στο $(0,+\infty)$ δηλαδή $f' \downarrow (0,+\infty)$ και $0< x-2 < \xi_1<x+1<\xi_2<x+4$

Θα είναι $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$ δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$f'(\frac{1}{x}) = \frac{x+1}{e^x} \Rightarrow -\frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x}) = \frac{x+1}{e^x}(-\frac{1}{x^2}) \Rightarrow [f(\frac{1}{x})]' = (e^{-x}\frac{1}{x})' \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\frac{1}{x}) = e^{-x}\frac{1}{x} + c$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = \frac{1}{e} + c \Rightarrow c = 0$

Άρα $f(\frac{1}{x}) = e^{-x}\frac{1}{x}$

Έστω $\frac{1}{x} = \omega$ τότε $x = \frac{1}{\omega}$, $\omega \in (0, +\infty)$. Άρα $f(\omega) = \omega e^{-1/\omega}$

Τελικά $f(x) = xe^{-1/x}$ $x \in (0, +\infty)$.

2η λύση:

$f'(\frac{1}{x}) = \frac{x+1}{e^x}$, $x>0$

Θέτω $\frac{1}{x} = \omega \Rightarrow x = \frac{1}{\omega} > 0$

Άρα $f'(\omega) = (\frac{1}{\omega}+1)\, e^{-1/\omega} \Rightarrow f'(\omega) = (\omega\, e^{-1/\omega})' \Rightarrow f(\omega) = \omega\, e^{-1/\omega} + c$

Για $x = 1$ είναι $\omega = 1$ άρα $f(1) = e^{-1} + c \Rightarrow c = 0$

Άρα $f(\omega) = \omega\, e^{-1/\omega}$, $\omega>0$ ή $f(x) = x\, e^{-1/x}$, $x>0$

Β.

1. Είναι $f'(x) = e^{-1/x} + xe^{-1/x}\,\dfrac{1}{x^2} = e^{-1/x}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

$f'(1) = \dfrac{2}{e}$, $f(1) = \dfrac{1}{e}$

Η εφαπτομένη στο $x_0 = 1$ είναι:

$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y = \dfrac{2}{e}x - \dfrac{1}{e}$ (ε)

2. Είναι: $f''(x) = \dfrac{1}{x^3}\,e^{-1/x} > 0$ για $x > 0$.

Άρα η $f(x)$ είναι κυρτή στο $\in (0, +\infty)$ και η C_f βρίσκεται πάνω από την (ε) εκτός του σημείου επαφής.

Είναι $f(x) \geq \dfrac{2}{e}x - \dfrac{1}{e} \Rightarrow f(x) - \dfrac{2}{e}x + \dfrac{1}{e} \geq 0$ για κάθε $x \in [1,2]$

Άρα $\displaystyle\int_1^2 \left(f(x) - \frac{2}{e}x + \frac{1}{e}\right)dx > 0 \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx + \int_1^2 \left(-\frac{2}{e}x + \frac{1}{e}\right)dx > 0 \Rightarrow$

$\displaystyle\int_1^2 f(x)dx + \left[-\frac{2}{e}x + \frac{1}{e}\right]_1^2 > 0 \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx - \frac{2}{e} > 0 \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx > \frac{2}{e}$

Γ. $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^3} = \dfrac{e^{-1/x}}{x^2} > 0$ στο $[1,t]$

Άρα $\displaystyle E = \int_1^t g(x)dx = \int_1^t \frac{1}{x^2}e^{-1/x}\,dx = \left[e^{-1/x}\right]_1^t = e^{-1/t} - e^{-1}$ τ.μ.

Δ. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} E(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(e^{-\frac{1}{t}} - e^{-1}\right) = \lim_{\omega\to 0}\left(e^{\omega} - e^{-1}\right) = 1 - e^{-1}$

(Έστω $-\dfrac{1}{t} = \omega$, όταν $t \to +\infty$ τότε $\omega \to 0$)

Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝ.ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολικό βιβλίο σελ.334.
Β.1. σελ. 213.
Β.2. σελ. 212.
Γ. **α** – Λ
β – Σ
γ – Λ
δ – Λ
ε – Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α) Έχουμε $z=\dfrac{1+2w}{1-w}\ (w\neq 1)\Leftrightarrow z(1-w)=1+2w\Leftrightarrow z-zw=1+2w\Leftrightarrow$

$2w+zw=z-1\Leftrightarrow w(2+z)=z-1\Leftrightarrow$

$w=\dfrac{z-1}{z+2}\ (z\neq -2)\Leftrightarrow w+1=\dfrac{z-1}{z+2}+1\Leftrightarrow$

$w+1=\dfrac{z-1+z+2}{z+2}=\dfrac{2z+1}{z+2}$.

Από την υπόθεση $|w+1|=1$.

Άρα

$|w+1|=\left|\dfrac{2z+1}{z+2}\right|=1\Leftrightarrow|2z+1|=|z+2|\Leftrightarrow$

$|2z+1|^2=|z+2|^2\Leftrightarrow(2z+1)(2\overline{z}+1)=(z+2)(\overline{z}+2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4z\overline{z}+2z+2\overline{z}+1=z\overline{z}+2z+2\overline{z}+4\Leftrightarrow 3|z|^2=3\Leftrightarrow|z|=1$.

β) **i)** Έχουμε $|z_1|=1\Leftrightarrow|z_1|^2=1\Leftrightarrow z_1\overline{z}_1=1\Leftrightarrow\overline{z}_1=\dfrac{1}{z_1},\ \overline{z}_2=\dfrac{1}{z_2}\ ,\overline{z}_3=\dfrac{1}{z_3}$

Επειδή $z\in R\Leftrightarrow z=\overline{z}$ (Πρέπει να αποδειχθεί) αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{\alpha}=\alpha$.

Οπότε

$$\overline{\alpha}=\overline{\left(\frac{z_1+z_2}{z_3}\right)}+\overline{\left(\frac{z_2+z_3}{z_1}\right)}+\overline{\left(\frac{z_1+z_3}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_3}+\frac{\overline{z}_2}{\overline{z}_3}+\frac{\overline{z}_2}{\overline{z}_1}+\frac{\overline{z}_3}{\tilde{z}_1}+\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}+\frac{\overline{z}_3}{\overline{z}_2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_3}}+\frac{\frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_3}}+\frac{\frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_1}}+\frac{\frac{1}{z_3}}{\frac{1}{z_1}}+\frac{\frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_2}}+\frac{\frac{1}{z_3}}{\frac{1}{z_2}}=\frac{z_3}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}+\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_2}{z_3}=$$

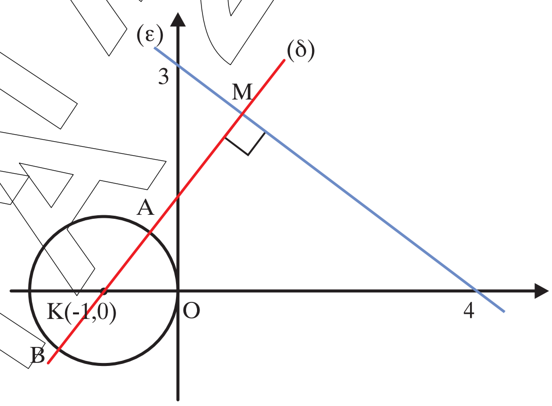
$$=\frac{z_1+z_2}{z_3}+\frac{z_2+z_3}{z_1}+\frac{z_1+z_3}{z_2}=\alpha\,.$$

ii) Έχουμε $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}\right)=\dfrac{\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}\right)+\left(\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}+\frac{\overline{z}_2}{\overline{z}_3}+\frac{\overline{z}_3}{\overline{z}_1}\right)}{2}=$

$$\frac{\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}+\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}}{2}=\frac{\frac{z_1+z_2}{z_3}+\frac{z_1+z_3}{z_2}+\frac{z_2+z_3}{z_1}}{2}=$$

$$=\frac{-\frac{z_3}{z_3}-\frac{z_2}{z_2}-\frac{z_1}{z_1}}{2}=-\frac{3}{2}$$

γ) **<u>1ος Τρόπος</u>**



Έχουμε

$$d(K,\varepsilon)=\frac{|3(-1)+4\cdot 0-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{5}=3$$

Οπότε

Ελάχιστη απόσταση είναι:
$(AM)=d(K,\varepsilon)-\rho=3-1=2$ και

μέγιστη $(BM)=d(K,\varepsilon)+\rho=3+1=4$.

<u>2ος Τρόπος</u>

Έχουμε $(\varepsilon)\perp(\delta)\Leftrightarrow\lambda_\delta=\frac{4}{3}$. Άρα (δ): $y=\frac{4}{3}(x+1)\Leftrightarrow 4x-3y+4=0$. Για να βρούμε το Μ λύνουμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l}3x+4y-12=0\\4x-3y+4=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow(x,y)=\left(\frac{4}{5},\frac{12}{5}\right)\ \text{άρα}\ M\left(\frac{4}{5},\frac{12}{5}\right)$$

$$(KM)=\sqrt{\left(\frac{4}{5}+1\right)^2+\left(\frac{12}{5}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{225}{25}}=3$$

Οπότε

Ελάχιστη απόσταση είναι: $(AM)=(KM)-\rho=3-1=2$ και

μέγιστη $(BM)=(KM)+\rho=3+1=4$.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Είναι $g(x)=e^x+x$ (1). Τότε $g'(x)=e^x+1>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.
Άρα η συνάρτηση g είναι 1 – 1 ως γνησίως αύξουσα.

β) Έχουμε

$$xf'(x)=\frac{x+1}{e^{f(x)}+1}\Leftrightarrow xf'(x)\left(e^{f(x)}+1\right)=x+1\Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^{f(x)}+f'(x)=1+\frac{1}{x}\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}+f(x)\right)'=(x+\ln x)'\Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x+c.$$

Για $x=1$ έχουμε $e^{f(1)}+f(1)=1+c$ με $c=0$. Άρα

$e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x=e^{\ln x}+\ln x$ και λόγω της (1) έχουμε

$g(f(x))=g(\ln x)$. Αλλά η g είναι 1-1 . Άρα $f(x)=\ln x$.

γ) Είναι $h(x)=\dfrac{f(x)-1}{x}$.

Τότε $h'(x)=\left(\dfrac{\ln x-1}{x}\right)'=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-(\ln x-1)}{x^2}=\dfrac{2-\ln x}{x^2}$.

Αν $h'(x)=0$ ή $2-\ln x=0$ ή $\ln x=2$ ή $x=e^2$

x	0	e^2	$+\infty$
h΄(x)	+	0	−
h(x)	↗		↘

Η h είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in\left(0,e^2\right]$

Η h είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in[e^2,+\infty)$

Έχουμε $h_{\max}=h\left(e^2\right)=\dfrac{\ln e^2-1}{e^2}=\dfrac{1}{e^2}$

<u>Πεδίο τιμών</u>:

$$\lim_{x\to0^+}h(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}(\ln x-1)=(+\infty)(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x - 1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 .$$

$$h(A) = \left(\lim_{x\to 0^+} h(x), h\left(e^2\right)\right] \cup \left(\lim_{x\to+\infty} h(x), h\left(e^2\right)\right] = \left(-\infty, \frac{1}{e^2}\right] \cup \left(0, \frac{1}{e^2}\right] = \left(-\infty, \frac{1}{e^2}\right].$$

δ) Έχουμε $\left(\dfrac{\eta\mu x}{e}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} = \left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right)^{\eta\mu x}$.

Για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $\dfrac{\eta\mu x}{e} > 0$, $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e} > 0$

Λογαριθμίζουμε τη σχέση και έχουμε:

$$\ln\left(\frac{\eta\mu x}{e}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} = \ln\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right)^{\eta\mu x} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln\left(\frac{\eta\mu x}{e}\right) = \eta\mu x \cdot \ln\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right) \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x \cdot \left(\ln(\eta\mu x) - \ln e\right) = \eta\mu x \cdot \left(\ln(\sigma\upsilon\nu x) - \ln e\right) \Leftrightarrow \frac{\ln(\eta\mu x) - 1}{\eta\mu x} = \frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x) - 1}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(\eta\mu x) = h(\sigma\upsilon\nu x) \quad (2)$$

Για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ισχύουν οι σχέσεις $0 < \eta\mu x < 1$, $0 < \sigma\upsilon\nu x < 1$ και $(0,1) \subset \left(0, e^2\right)$.

Η h είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0, e^2\right]$. Από τη (2) έχουμε

ημx = συνx ή εφx = 1 ή $x = \dfrac{\pi}{4}$.

ε) Έχουμε $h'(x) = \dfrac{2 - \ln x}{x^2}$ και

$$h''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot (2 - \ln x)}{x^4} = \frac{-x - 4x + 2x \cdot \ln x}{x^4} = \frac{x(2\ln x - 5)}{x^4} = \frac{2\ln x - 5}{x^3}.$$

$h''(x) = 0$ ή $2\ln x - 5 = 0$ ή $\ln x = \dfrac{5}{2}$ ή $x = e^{\frac{5}{2}}$.

x	0		$e^{5/2}$		$+\infty$
h΄΄(x)		−	0	+	
h΄(x)		↘		↗	

Η h είναι κοίλη στο διάστημα $\left(0, e^{5/2}\right]$.

Η h είναι κυρτή στο διάστημα $\left[e^{5/2}, +\infty\right)$.

$$h'_{\min}\left(e^{5/2}\right) = \frac{2 - \ln e^{5/2}}{\left(e^{5/2}\right)^2} = \frac{2 - \frac{5}{2}}{e^5} = -\frac{1}{2e^5}.$$

Τότε $h'(x) \geq -\frac{1}{2e^5}$ για κάθε $x > 0$.

Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = \frac{2-\ln x}{x^2}$. Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε $h'(\xi) = \frac{h(x_2)-h(x_1)}{x_2-x_1}$ (3).

Αλλά για κάθε $x > 0$ επομένως και για το $\xi > 0$ ισχύει $h'(\xi) \geq -\frac{1}{2e^5}$ (4).

Από τις (3) και (4) έχουμε $\frac{h(x_2)-h(x_1)}{x_2-x_1} \geq -\frac{1}{2e^5}$.

ΘΕΜΑ 4^{o}

α) Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = \int_3^x \left(\int_1^u f(t)dt \right) du - 2x + 6 \geq 0$.

Έχουμε $g(3) = 0$. Τότε $g(x) \geq g(3)$ και η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 3$.

Από το Θεώρημα Fermat ισχύει $g'(3) = 0$. Αλλά $g'(x) = \int_1^x f(t)dt - 2$

και για $x = 3$ έχουμε $g'(3) = \int_1^3 f(t)dt - 2 = 0$ ή $\int_1^3 f(t)dt = 2$.

β) Για $x = 0$ και $y = f(0)$ έχουμε

$4 \cdot 0 + f(0) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(0) = 3 \; \textit{και} \; f'(0) = -4$.

Έχουμε :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x t^2 f(t)dt - x^3}{x^4} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\left(\int_0^x t^2 f(t)dt - x^3\right)'}{\left(x^4\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 f(x) - 3x^2}{4x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-3}{4x} = \frac{1}{4} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{4} \cdot f'(0) = \frac{-4}{4} = -1.$$

γ) **<u>1^{ος} Τρόπος</u>**

Για κάθε $x > 1$ η ανίσωση γίνεται:

$(x-1)h'(x) > h(x) \Leftrightarrow (x-1)h'(x) - h(x) > 0$

Θέτουμε $K(x)=(x-1)h'(x)-h(x)=(x-1)f(x)-h(x)$ για $x\in[1,+\infty)$.
Έτσι έχουμε
$K'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)-h'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)-f(x)=$
$=(x-1)f'(x)>0$ για κάθε $x>1$.

Άρα η K είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ αφού είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$.

Επομένως $x>1\Leftrightarrow K(x)>K(1)\Leftrightarrow(x-1)h'(x)-h(x)>0$.

<u>2ος τρόπος</u>

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(u)=\displaystyle\int_1^u f(t)dt$, $u\in[1,x]$.

Η h είναι συνεχής στο $[1,x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,x)$ με $h'(u)=f(u)$.

Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,x)$ ώστε $h'(\xi)=\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}$.

Αλλά $h(1)=\displaystyle\int_1^1 f(t)dt=0$ οπότε $h'(\xi)=\dfrac{h(x)}{x-1}$ (1). Επίσης $h'(x)=f(x)$ και $h''(x)=f'(x)>0$. Άρα η h' είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\geq1$ και για $\xi<x$ έχουμε $h'(\xi)<h'(x)$ (2) . Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $h'(x)>\dfrac{h(x)}{x-1}$.

δ) Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)dt+3x-x^2$, $x\in R$.

Η φ είναι συνεχής στο [1, 3] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων .
Η φ είναι παραγωγίσιμη στο (1, 3) ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\varphi'(x)=f(x)+3-2x$.

Είναι $\left.\begin{array}{l}\varphi(1)=2\\ \varphi(3)=\displaystyle\int_1^3 f(t)dt+9-9=2\end{array}\right\}\Rightarrow\varphi(1)=\varphi(3)$

Από το Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,3)$ ώστε $\varphi'(\xi)=0\Leftrightarrow\Leftrightarrow f(\xi)+3-2\xi=0\Leftrightarrow f(\xi)+3=2\xi$.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Α. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 194, το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Β. Βλέπε τον ορισμό στη σελίδα 279 του σχολικού βιβλίου.

Γ. Βλέπε σελίδα 246 του σχολικού βιβλίου, αμέσως μετά την διατύπωση του θεωρήματος Rolle.

Δ. **1.** Σωστό. Βλέπε στο σχολικό βιβλίο σελίδα 91:

$$z+\overline{z}=2\alpha \quad \text{με } \alpha=Re(z).$$

2. Λάθος. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 185 με $\alpha = e$: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

3. Λάθος. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 142:

$$\{x/x\in A \;\; και \;\; x\in B, \qquad με\; g(x)\neq 0\}$$

4. Σωστό. Βλέπε το ΣΧΟΛΙΟ στη σελίδα 218 του σχολικού βιβλίου.

5. Σωστό. Βλέπε στο σχολικό βιβλίο σελίδα 336 τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.

ΘΕΜΑ 2

α. **i.** Η f, ως πολυωνυμική, είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = 12x^2 + 24\lambda x + \lambda - 1,$$
$$f''(x) = 24x + 24\lambda$$

Επειδή στο $x_0 = -1$ παρουσιάζει καμπή, είναι $f''(-1) = 0$:

$$f''(-1) = 0 \Leftrightarrow -24 + 24\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

ii. Επειδή $\lambda = 1$ είναι $\boxed{f(x) = 4x^3 + 12x^2}$ και

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 24x + 24 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 24x + 24 < 0 \Leftrightarrow x < -1$$

Επομένως η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και κυρτή στο $[-1, +\infty)$.

β. Θέτουμε $u = f(x)$. Επειδή

$$\lim_{x\to-3} f(x) = \lim_{x\to-3}(4x^3 + 12x^2) = 0$$

είναι

$$\lim_{x\to-3}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = \lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

γ. i. Η ζητούμενη αρχική είναι η

$$F(x) = x^4 + 4x^3 + c, \quad x \in \mathbb{R}$$

με c σταθερά, γιατί για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = (x^4 + 4x^2 + c)' = 4x^3 + 12x^2 = f(x)$$

Το σημείο (0, 1) ανήκει στην γραφική παράσταση της F, οπότε $F(0) = 1$:

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$$

Επομένως

$$\boxed{F(x) = x^4 + 4x^3 + 1}, \ x \in \mathbb{R}$$

ii. Βρίσκουμε τις ρίζες της συνάρτησης:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -3$
Το ζητούμενο εμβαδόν Ε ισούται με το ολοκλήρωμα

$$E = \int_{-3}^{0}|f(x)|dx$$

Στο διάστημα $[-3, 0]$ είναι $f(x) = 4x^2(x+3) \geq 0$, άρα

$$E = \int_{-3}^{0}f(x)dx$$

Τότε

$$E = F(0) - F(-3) = 1 + 26 = 27 \, \tau.\mu$$

ΘΕΜΑ 3

α. i) Θέτουμε στη δοσμένη σχέση $x = \frac{\pi}{4}$ και παίρνουμε:

$$f(\eta\mu\frac{\pi}{4}) + f(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow 2f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Πάλι, με x = 0 παίρνουμε:

$$f(\eta\mu 0) + f(\sigma\upsilon\nu 0) = 1 \Leftrightarrow f(0) + f(1) = 1$$

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση g: $[0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = f(x) + x - 1, \qquad \text{για κάθε } x \in [0, 1]$$

- Η g είναι συνεχής, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων· της f, και της $x - 1$.
- Είναι $g(0) = f(0) - 1$ και $g(1) = f(1) \overset{(\alpha i)}{=} 1 - f(0)$, οπότε
$$g(0) \cdot g(1) = -[f(0) - 1]^2 \quad \textbf{(1)}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση:
Αν $f(0) = 1$, τότε από (1) $\Leftrightarrow g(0) = 0$ ή $g(1) = 0$. Η g θα έχει ρίζα το $x_0 = 0$ ή το $x_0 = 1$

2η περίπτωση:
Αν $f(0) \neq 1$, τότε από την (1) είναι: $g(0) \cdot g(1) < 0$. Εφαρμόζεται, επομένως, το θεώρημα του Bolzano για την g στο [0, 1], έτσι θα υπάρχει, τουλάχιστον, ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$.
Σε κάθε περίπτωση, λοιπόν, υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$, τέτοιο ώστε
$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 = 1,$$
το οποίο απόδειξε το ζητούμενο.

β. **i.** Θεωρούμε την συνάρτηση h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με
$$h(x) = f(x) - \sqrt{2}\,x + \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως άθροισμα της f, η οποία από υπόθεση είναι παραγωγίσιμη, και της πολυωνυμικής $-\sqrt{2}x + \frac{1}{2}$, με παράγωγο
$$h'(x) = f'(x) - \sqrt{2}$$
- Η h έχει ελάχιστο στο $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Πραγματικά, είναι
$$h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$$
Ακόμα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
$$f(x) \geq \sqrt{2}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
- Το $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμό της h.

Επομένως, εφαρμόζεται το θεώρημα του Fermat, σύμφωνα με το οποίο $h'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$:
$$h'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$
Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο με τετμημένη $\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι
$$y - f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y-\frac{1}{2}=\sqrt{2}(x-\frac{\sqrt{2}}{2}) \Leftrightarrow y=\sqrt{2}\,x-\frac{1}{2}$$

ii) Είναι

$$f(0)+f(1)=1 \Leftrightarrow f(1)=1-f(0)$$

και

$$f(\text{ημx}) + f(\text{συνx}) = 1 \Leftrightarrow f(\text{συνx}) = 1 - f(\text{ημx}).$$

Αντικαθιστούμε στο όριο και έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-f(0))-(1-f(\eta\mu x))}{\eta\mu x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)-f(0)}{\eta\mu x-0} \quad \mathbf{(2)}$$

Κάνουμε την αντικατάσταση y = ημx. Επειδή

$$\lim_{x\to 0}(\text{ημx})=\text{ημ}0=0$$

το y τείνει στο 0. Έτσι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)-f(0)}{\eta\mu x-0}=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y-0} \quad \mathbf{(3)}$$

Επειδή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο 0, από τον ορισμό της $f'(0)$ είναι

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y-0}=f'(0) \qquad \mathbf{(4)}$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την $f'(0)$.

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της δοσμένης $f(\eta\mu x)+f(\sigma\upsilon\nu x)=1$ και παίρνουμε:

$$[f(\text{ημx})+f(\text{συνx})]'=(1)' \Leftrightarrow [f(\text{ημx})]'+[f(\text{συνx})]'=0$$

$$\Leftrightarrow (\text{ημx})'f'(\text{ημx})+(\text{συνx})'f'(\text{συνx})=0$$

$$\Leftrightarrow \text{συνx}\cdot f'(\text{ημx})-\eta\mu x\cdot f'(\text{συνx})=0$$

Από εδώ, για $x = 0$ έχουμε

$$\text{συν}0\cdot f'(\text{ημ}0)-\eta\mu 0\cdot f'(\text{συν}0)=0 \Leftrightarrow f'(0)=0.$$

Επομένως, σύμφωνα με τις (2), (3) και (4):

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)-f(0)}{\eta\mu x}=f'(0)=0$$

ΘΕΜΑ 4

Α. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(x) = e^x - x - 1,\ x\in\mathbb{R}$$

η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$g'(x) = e^x - 1,\ x\in\mathbb{R}$$

Είναι $g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ και

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

Επομένως η g, ως συνεχής στο $x_0 = 0$:

- είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$,
- είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

άρα, έχει ολικό ελάχιστο το $g(0) = 0$, οπότε

$$g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Από την παραπάνω απόδειξη συμπεραίνουμε, ότι η ισότητα

$$g(x) = g(0) \Leftrightarrow e^x = x + 1$$

αληθεύει ακριβώς όταν x=0, αφού η θέση ελαχίστου της συνάρτησης είναι μόνον η $x = 0$.

Β. **α. i.** Θέτουμε $u = x - xt$, οπότε $du = -xdt$. Για $t = 0$ είναι $u = x$ και για $t = 1$ είναι $u = 0$. Τότε:

$$x\int_0^1 e^{f(x-xt)}dt = \int_x^0 e^{f(u)}(-du) = \int_0^x e^{f(u)}du = \int_0^x e^{f(t)}dt.$$

Τότε για κάθε $x \in [0, +\infty)$ έχουμε:

$$z = \int_0^x e^{f(t)}dt + i\,x\int_0^1 e^{f(x-xt)}dt = \int_0^x e^{f(t)}dt + i\int_0^x e^{f(t)}dt$$

οπότε

$$Re(z) = Im(z) = \int_0^x e^{f(t)}dt$$

Στην συνέχεια

$$z = \int_0^x e^{f(t)}dt + i\int_0^x e^{f(t)}dt \Leftrightarrow z = (1+i)\int_0^x e^{f(t)}dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{1+i} = \int_0^x e^{f(t)}dt$$

Επειδή $e^{f(t)} > 0$, για κάθε $x \geq 0$ είναι $\int_0^x e^{f(t)}dt \geq 0$, επομένως

$$\frac{z}{1+i} = Re(z) = Im(z) \geq 0, \text{ για κάθε } x \geq 0$$

ii. Βρήκαμε $\frac{z}{1+i} = \int_0^x e^{f(t)}dt \geq 0$, οπότε

$$\left|\frac{z}{1+i}\right| = \left|\int_0^x e^{f(t)}dt\right| = \int_0^x e^{f(t)}dt$$

άρα

$$\frac{|z|}{\sqrt{2}} = \int_0^x e^{f(t)}dt\ , \qquad \text{για κάθε } x \geq 0$$

Σύμφωνα με την σχέση αυτή και την δεύτερη από τις δοσμένες είναι:

$$\int_0^x e^{f(t)}dt = \int_0^x [f(t) + e^t]\,dt + f(\alpha) - 1 \quad \mathbf{(1)}, \quad \text{για κάθε } x \geq 0$$

Επειδή η f και η e^t είναι συνεχείς, θα είναι συνεχείς

- η σύνθεση $e^{f(t)}$ και
- το άθροισμα $f(t) + e^t$,

επομένως οι συναρτήσεις που ορίζονται από τα ολοκληρώματα

$$\int_0^x e^{f(t)}dt\ , \qquad \int_0^x [f(t)+e^t]\,dt$$

είναι παραγωγίσιμες με

$$\left(\int_0^x e^{f(t)}dt\right)' = e^{f(x)}, \qquad \left(\int_0^x [f(t)+e^t]\,dt\right)' = f(x)+e^x$$

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της (1) και έχουμε:

$$\left(\int_0^x e^{f(t)}dt\right)' = \left(\int_0^x [f(t)+e^t]\,dt + f(\alpha) - 1\right)'$$

ή, τελικώς:

$$e^{f(x)} = f(x)+e^x, \ \text{για κάθε } x \geq 0$$

β. Για κάθε x_1, $x_2 \geq 0$ από την (α.ii) έχουμε

$$e^{f(x_1)} = f(x_1)+e^{x_1} \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{f(x_1)} - f(x_1)$$

$$e^{f(x_2)} = f(x_2)+e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_2} = e^{f(x_2)} - f(x_2)$$

Έστω $x_1 < x_2$. Επειδή η e^x είναι γνησίως αύξουσα έχουμε

$$e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{f(x_1)} - f(x_1) < e^{f(x_2)} - f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow g\big(f(x_1)\big) < g\big(f(x_2)\big)$$

με g την συνάρτηση του ερωτήματος Α, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0, +∞), στο οποίο παίρνει τιμές η f. Επομένως

$$g\big(f(x_1)\big) < g\big(f(x_2)\big) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε x_1, $x_2 \geq 0$,

$$\text{αν } x_1 < x_2, \text{ τότε } f(x_1) < f(x_2)$$

που σημαίνει, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Η f ως γνησίως αύξουσα, είναι $1-1$, άρα έχει αντίστροφη.
Πάλι η f, ως γνησίως αύξουσα και συνεχής, έχει σύνολο τιμών το διάστημα:

$$\left[f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$$

- Η σχέση $e^{f(x)} = f(x)+e^x$ επειδή $f(x) \geq 0$ δίνει

$$e^{f(x)} \geq e^x \Leftrightarrow f(x) \geq x$$

Επειδή

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

είναι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- Για x = 0 πάλι από την $e^{f(x)} = f(x)+e^x$ παίρνουμε

$$e^{f(0)} = f(0)+1.$$

Έτσι, το $f(0)$ είναι λύση της εξίσωσης $e^x = x + 1$. Από το ερώτημα Α. η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση x = 0, που συνεπάγεται, ότι

$$\boxed{\boldsymbol{f(0)=0}} \quad \textbf{(2)}$$

Επομένως η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα

$$\left[f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = [0, +\infty)$$

Έστω $y = f(x)$ με $x \geq 0$. Από την $e^{f(x)} = f(x) + e^x$ έχουμε:

$$e^y = y + e^x \Leftrightarrow e^x = e^y - y$$

Η τελευταία εξίσωση έχει λύση ως προς $x \geq 0$, αφού $e^y - y \geq 1$. Τότε:

$$e^x = e^y - y \Leftrightarrow x = \ln(e^y - y)$$

Για την τιμή αυτή του x είναι $f(x) = y$. Πραγματικά

$$e^{f(\ln(e^y - y))} - f(\ln(e^y - y)) = e^{\ln(e^y - y)} = e^y - y$$

Η g ως γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ είναι 1-1, έτσι $f(\ln(e^y - y)) = y$

Άρα:

$$f^{-1}(x) = \ln(e^x - x), \qquad x \in [0, +\infty)$$

δ. Για x = 0 από την (1) παίρνουμε:

$$\int_0^0 e^{f(t)} dt = \int_0^0 [f(t) + e^t]\, dt + f(\alpha) - 1 \Leftrightarrow f(\alpha) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{f(\alpha) = 1}} \quad \mathbf{(3)}$$

Για την συνάρτηση f εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού στο διάστημα [0, α], α > 0, γιατί είναι συνεχής σε αυτό και παραγωγίσιμη στο αντίστοιχο ανοιχτό διάστημα, ως παραγωγίσιμη από υπόθεση στο $(0, +\infty)$. Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον, ξ∈(0, α) με

$$\frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha - 0} = f'(\xi)$$

ή λόγω των (2) και (3):

$$\frac{1 - 0}{\alpha} = f'(\xi) \quad ή \quad \alpha f'(\xi) = 1.$$